Robertson-féle határozatlansági reláció általánosítása és geometriai interpretációja

Andai Attila, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
andaia@math.bme.hu

Robertson általánosította Heisenberg híres határozatlansági relációját több fizikai mennyiségre. Ennek a határozatlansági relációnak egyfajta továbbgondolása a klasszikus kovariancia fogalom általánosítása kvantummechanikai megfigyelhető mennyiségekre operátormonoton függvények segítségével, mely többek között Petz, Hiai és Gibilisco érdeme. Ezekre a kovarianciákra érvényes pár éve ismert egyenlőtlenségek közül kerül bemutatásra néhány. Ezeken kívül egy új típusú kovariancia fogalom kerül bevezetésre, amivel élesíthetőek a már ismert egyenlőtlenségek, illetve amellyel szép geometriai interpretációját adhatjuk meg a határozatlansági relációnak.

Az Einstein-gyrocsoport endomorfizmusai tetszőleges dimenzióban

Frenkel Péter, Eötvös Loránd Tudományegyetem, frenkelp265@gmail.com

Tetszőleges dimenzióban sikerült meghatározni az Einstein-gyrocsoport automorfizmusait és folytonos endomorfizmusait. Ez Molnár Lajos és Virosztek Dániel egy friss eredményének általánosítása; ők a háromdimenziós esetben a folytonos endmorfizmusokat határozták meg.

Megőrzési problémák kvantum állapotokon és pozitív definit operátorokon

Gaál Marcell, Szegedi Tudományegyetem, marcell.gaal.91@gmail.com

A kvantuminformáció-elméletben alkalmazott relatív entrópia jellegű mennyiségek két kvantummechanikai állapot különbözőségének jellemzésére szolgálnak. Ezen mennyiségek nagy része ún. f-divergencia, melynek szimmetria transzformációit 2013-ban meghatározta Molnár Lajos, Nagy Gergő és Szokol Patrícia. A jelenlegi vizsgálataink alapját képező kvantum Rényi divergencia és a Silvestru Dragomir által közelmúltban bevezetett divergencia fogalom (mely egyben a Belavkin-Staszewski relatív entrópia általánosításának is tekinthető) általános esetben nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. A közelmúltban igazoltuk ezen mennyiségek nem f-divergencia voltát, továbbá meghatároztuk a mennyiségeket megőrző transzformációk szerkezetét a sűrűség operátorok halmazán, illetve megadtuk az ugyanezt megőrző bijektív transzformációk leírását a pozitív definit operátorok kúpján. Az előadáson bemutatom az elért eredményeket.

Qubit csatornák térfogata és a térfogat eloszlása a klasszikus csatornák felett

Lovas Attila, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
lovas@math.bme.hu

A teljesen potitív és trace-őrző lineáris leképezések – más néven kvantumcsatornák – a Kolmogorov-féle valószínűségszámításból ismert Markov-láncok nemkommutatív általánosításai. Ennek megfelelően, ha egy kvantumcsatornát a diagonális állapotokra megszorítunk, akkor annak megfelel egy Markov átmenetmátrix, amelyre mint "alul fekvő" klasszikus csatornára hivatkozunk és azon kvantumcsatornák összességét, melyeknek ugyanaz a klasszikus csatorna a megszorítottja a szóban forgó klasszikus csatorna feletti kvantumcsatornáknak nevezzük. A kvantumcsatornák tere a Choi-féle reprezentáció értelmében azonosítható egy elegendően nagy dimenziós vektortérbe beágyazott konvex részsokasággal. A qubit-qubit csatornák (valós/komplex illetve egységőrző és általános) esetére kiszámítottuk ezen konvex részsokaság térfogatát, továbbá explicit formulákat kaptunk a térfogat klasszikus csatornák feletti eloszlására vonatkozólag. Az integrációs eljárás mintájára konstruáltunk egy algoritmust, amellyel egyenletes eloszlású véletlen pontokat tudunk generálni a qubit csatornákon, így Monte-Carlo szimuláció segítségével tudtuk numerikusan vizsgálni a trace-távolság kontrakciós együttható eloszlását az egész téren, illetve rögzített klasszikus csatornák felett. Azt kaptuk, hogy egységőrző csatornák esetén a trace-távolság kontrakciós együttható módusza a valós esetben érdekes, nem folytonos viselkedést mutat a "legjobban keverő" klasszikus csatorna környezetében.

Diszkrét Sturm-Liouville operátorok első két sajátértékéről

Markó Zoltán, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
marzol89@gmail.com

A véges intervallumon vett Schrödinger-operátorok két legkisebb sajátértékének különbségét fundamental gap-nek nevezzük. Ha pl. a potenciál konvex, akkor ez a kifejezés a konstans potenciál esetén veszi fel minimumát, és hasonló eredmények több speciális esetben is ismertek. Az előadásban ezen kérdés diszkrét változatát vizsgáljuk, mely speciális tridiagonális mátrixok fundamental gap-jeinek vizsgálatára vezet.

Kölcsönösen torzítatlan bázisok

Matolcsi Máté, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet,
matolcsi.mate@renyi.mta.hu

Két ortonormált bázis $\mathbb{C}^n$-ben egymásra nézve torzítatlan, ha bármely két belőlük vett vektor skaláris szorzatának abszolút értéke $1/\sqrt{n}$. Vajon maximum hány ortonormált bázis adható meg $\mathbb{C}^n$-ben úgy, hogy bármely kettő egymásra nézve torzítatlan? Ez a kérdés kvantum-információelméletből származik, és a válasz $n+1$ ha n prímhatvány. Az előadásban elsősorban az $n = 6$ esetről lesz szó, ahol az a sejtés, hogy csak három ilyen bázis adható meg.

Determinánstartó transzformációk Hilbert-tér operátorok struktúráin

Nagy Gergő, Debreceni Egyetem, MTA-DE ”Lendület”,
nagyg@science.unideb.hu

Az előadás során ismertetjük Frobenius egy híres tételének egy végtelen dimenziós változatát. Az előbbi állítás - melyet az első, megőrzési problémával kapcsolatos eredménynek tekintenek - leírja az adott méretű komplex mátrixok tere determinánst megőrző lineáris leképezéseinek struktúráját. A mátrixok determinánsának kiterjesztéseként, ezt a mennyiséget definiálták olyan, végtelen dimenziós Hilbert-téren ható operátorokra is, melyek előállnak az identikus operátor és egy trace osztálybeli operátor összegeként. Ezen fogalom ismertetése után bemutatjuk a Frobenius-tétel egy variánsát, mely megadja az ilyen operátorok tere determinánst invariánsan hagyó szürjektív affin transzformációinak általános alakjait. Az előadás további részében mátrixok különböző struktúráinak lineáris kombinációk determinánsát megőrző leképezéseivel kapcsolatos eredményeket tárgyalunk.

Többváltozós operátor monoton függvények karakterizációja

Pálfia Miklós, MTA-DE ”Lendület”, Palfia.Miklos@aut.bme.hu

Az egyváltozós operátor monoton függvényeket Loewner karakterizálta még 1934-ben. Loewner tétele ezeket a valós függvényeket a komplex felső félsíkot a komplex felső félsíkba képező holomorf függvényekként karakterizálja. Tehát ez a tétel azt mondja ki, hogy minden ilyen függvény automatikusan analitikusan kiterjeszthető az egész komplex felső félsíkra. Ebben az előadásban megvizsgáljuk, hogy mi történik ha egynél több változós a függvény. Mivel a változók operátorok, ezért ezeket a függvényeket nemkommutatív vagy más néven szabad függvényeknek nevezik, és ahogy az egyváltozós folytonos függvények kommutatív C*-algebrákat alkotnak, a szabad folytonos függvények nem-kommutatív C*-algebráknak feleltethetők meg, így az előadásban is operátor elméleti eszközöket fogunk használni a vizsgálatukhoz.

Néhány nevezetes operátoregyenlőtlenségről

Pitrik József, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, pitrik@math.bme.hu

Áttekintünk néhány nevezetes, a statisztikus fizikában, illetve a kvantum információelméletben jelentőséggel bíró operátoregyenlőtlenséget. Rámutatunk, hogy ezek nagy részénél bizonyos függvények operátor konvex tulajdonsága áll. A bemutatott eredmények egy része Molnár Lajossal és Virosztek Dániellel közös munkára alapul.

Operátorok Hilbert téren: Neumann alapvetésének nyomdokain

Sebestyén Zoltán , Eötvös Loránd Tudományegyetem, sebesty@cs.elte.hu

A nemkorlátos operátor adjungáltja, mint alapvető fogalom, központi szerepe jól ismert mintegy 85 éve. Az adjungált operátor képterének jellemzése (S.Z., 1983) mint alkalmas segédeszköz kerül ismertetésre. Meglepő, az irodalomban nem található eredmény szerint sűrűn definiált operátor alulról korlátossága ekvivalens az adjungáltjának teljes képterűségével. Következésképpen sűrűn definiált szigorúan pozitív szimmetrikus operátor adjungáltja teljes képterű. Pozitív önadjungált operátorok körében négyzetgyök létezése a spektráltétel felhasználása nélkül elemien bizonyítható (kijavítva A. Wouk majd ötven éve publikált bizonyítását).

Determináns- és trace-megőrző leképezések

Szokol Patrícia, Miskolci Egyetem, matszp@uni-miskolc.hu

Frobenius híres tétele a lineáris determinánst megőrző bijekciók szerkezetéről az első lineáris megőrzési problémának tekinthető. Előadásunkban szintén a determinánshoz kapcsolódó mennyiséget megőrző transzformációkat vizsgálunk. Nevezetesen leírjuk azon pozitív definit mátrixokon értelmezett transzformációk szerkezetét, melyek invariánsan hagyják két ilyen mátrix összegének a determinánsát. Emellett megmutatjuk, hogy a fenti transzformációk eleget tesznek bizonyos trace-t tartalmazó egyenlőségnek is.

Antiduális páron értelmezett pozitív operátorok

Tarcsay Zsigmond, Eötvös Loránd Tudományegyetem, tarcsay@cs.elte.hu

Az E és F komplex vektorterek közti antidualitásnak nevezünk egy $\langle\cdot,\cdot\rangle : F \times E \to \mathbb{C}$ szeszkvilineáris formát, ha az $(\langle y,\cdot\rangle)_{y\in F}$, illetve $(\langle\cdot,x\rangle)_{x\in E}$ funkcionál rendszerek szétválasztóak E, illetve F felett. Antiduális páron természetes módon értelmezhető egy operátor pozitivitása. Előadásunk során megmutatjuk, hogy számos Hilbert terek pozitív operátoraira vonatkozó eredmény érvényben marad ebben az általánosabb esetben is, továbbá ezek speciális esetként a funkcionálanalízis más területeire alkalmazhatók. Példaként a szuboperátorok pozitív kiterjeszthetőségét vizsgáljuk meg, a kapott eredményeket pedig Hilbert terek pozitív szuboperátoraira, valamint *-algebra pozitív szubfunkcionáljaira alkalmazzuk.

Szürjektív Lévy-Prohorov izometriák

Titkos Tamás, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet,
titkos.tamas@renyi.mta.hu

A határeloszlás tételek elméletében különösen fontos szerepet játszik a valószínűségi változók gyenge konvergenciája, ami nem más, mint az eloszlásmértékeik gyenge-* konvergenciája.

Yu. V. Prokhorov 1956-ban igazolta, hogy tetszőleges (X,d) teljes szeparábilis metrikus tér valószínűségi Borel mértékeinek $Pr(X,\mathcal{B})$ halmazán a gyenge-* konvergencia metrizálható, nevezetesen

$$\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \pi(\mu_n,\mu)\to 0,$$

ahol π az alábbi úgynevezett Lévy-Prokhorov távolságot jelöli

$$\pi(\mu,\nu) = \inf\left\{\varepsilon>0 \,\middle|\, \forall A\in\mathcal{B}:\ \mu(A)\le \nu(A^\varepsilon)+\varepsilon\right\};$$
$$A^\varepsilon = \bigcup_{a\in A}\left\{m\in M \,\middle|\, d(a,m)<\varepsilon\right\}.$$

Egy $\Phi : Pr(X,\mathcal{B}) \to Pr(X,\mathcal{B})$ leképezést Lévy-Prokhorov izometriának nevezünk, ha

$$\forall\,\mu,\nu\in Pr(X,\mathcal{B}) : \qquad \pi(\mu,\nu) = \pi(\Phi(\mu),\Phi(\nu)).$$

Vizsgálataink célja a *szürjektív* Lévy-Prokhorov izometriák megértése. Az előadás során az alapvető fogalmak és előismeretek mellett bemutatunk néhány fontos speciális esetet, amelyekben pontos leírás adható.

Bregman- és Jensen-távolságokat őrző leképezések az állapottéren és a pozitív definit mátrixok kúpján

Virosztek Dániel, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, virosz89@gmail.com

Meghatározzuk a véges kvantum rendszerek állapottereinek azon bijektív transzformációit, melyek megőrzik az állapotok Bregman- vagy Jensen-távolságát. Hasonló eredményeket mutatunk abban az esetben is, amikor az állapottér permutációi helyett a pozitív definit mátrixok kúpjának bijektív transzformációit tekintjük. Az előadásban megpróbálunk rávilágítani, mennyire különböző technikák vezetnek a Bregman- és Jensen-távolságokat őrző általánosított izometriák leírásához az állapottér, illetve a pozitív kúp esetében.