

# Algebra és számelmélet szigorlat

alkalmazott matematikus hallgatóknak

1. Természetes számok, műveletek, rendezés, teljes indukció. Az egész számok gyűrűje, rendezés. A racionális számok teste, rendezés.
2. Komplex számok, kanonikus és trigonometrikus alak, gyökvonás, egységgyökök.
3. Alapvető kombinatorikai leszámplálási eljárások, binomiális-, polinomiális-tétel. Gráfelméleti alapfogalmak, fák, Kruskal algoritmus.
4. Euler-utak, Hamilton-utak és -körök. Gráfok és mátrixok.
5. Egy és több határozatlanú polinomgyűrűk, racionális függvények teste, parciális törtek, szimmetrikus polinomok alaptétele.
6. Az algebra alaptétele és következményei. Harmad és negyedfokú egyenletek. Egyenletek közös gyökeinek, egyenletek többszörös gyökeinek a meghatározása.
7.  $V$  éges dimenziós vektorterek, bázis, dimenzió, alterek, lineáris sokaságok.
8. A mátrixok algebraja, invertálhatóság, rangszám-tétel. Determinánsok elemi tulajdonságai, kifejtési tétel, szorzástétel.
9. Lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának feltétele, a megoldás halmaz jellemzése. Az általános megoldás megkeresése, Cramer-szabály, az elimináció módszere.
10. Véges dimenziós vektorterek lineáris leképezései, műveletek tulajdonságai, reprezentációjuk mátrixokkal. Sajátérték, sajátvektor, invariáns altér meghatározása, mátrixok Jordan-féle normál alakja.
11. Önadjungált és unitér leképezések.
12. A számelmélet elemei. Egész számok kongruenciája, lineáris kongruenciák és lineáris diofantikus egyenletek megoldása.
13. Számelméleti függvények: osztók száma, összege, Euler-féle és Möbius-féle függvény és alkalmazásai. Euler-Fernat tétel. additív és multiplikatív számelméleti függvények viselkedése, átlaguk az osztók számán illusztrálva.
14. Prímszámok sorozatának végtelensége, Dirichlet tételének speciális esetei. Prímszámok reciprokainak összege. Az  $x$ -nél nem nagyobb prímek számára vonatkozó becslések.
15. Algebrai számtestek, egész bázis, norma, egységek, ideálosztályszám. Egyértelmű prímfaktorizáció kérdése algebrai számtestek egészeinek gyűrűjében.
16. Diofantikus egyenletek. Geometriai és additív számelmélet elemei. Minkowski tétele és alkalmazásai, lineáris diofantoszi egyenlőtlenségrendszerek megoldhatósága, természetes számok négyzetösszegként való előállítása.
17. Diofantikus approximáció, Dirichlet tétele, transzcendens számok.
18. A csoport fogalma, izomorfia, permutációcsoportok. Cayley tétele, részcsoportok, mellékosztályok, Lagrange tétele.
19. Nonnálósztó, homomorfia tétel, direkt szorzat, véges Abel-csoportok alaptétele. Konjugált osztályok. Feloldható és egyszerű csoportok.
20. Kommutatív gyűrűk. Főideálgűrűk és euklideszi gyűrűk. Az egyértelmű prímfaktorizáció tétele gyűrűkben. Dedekind gyűrűk.
21. Testbővítések, Galois-elmélet és egyenletek gyöképlettel való megoldhatósága. Geometriai szerkeszthetőség elmélete.