

TÉTELSOR AZ M2702 GEOMETRIA SZIGORLATHOZ

1. Az abszolút geometria felépítése

Illeszkedési axiómák. A vonalzó-axióma és a ráépülő fontosabb fogalmak. A félsík-axióma és a Pasch-tulajdonság. A szögmérő-axióma. Egybevágósági axióma. Néhány nevezetes abszolút geometriai tétel és bizonyításuk.

2. Párhuzamosság

Párhuzamosok létezése abszolút síkon. Párhuzamossági axiómák. Az euklideszi párhuzamossági axióma és nevezetes ekvivalensei. A klasszikus euklideszi sík/tér analitikus modellje. Modell a hiperbolikus síkon.

3. Izometriák és hasonlóságok

Az izometriák és hasonlóságok fogalma, elemi tulajdonságai. Speciális izometriák és hasonlóságok. Izometriák és hasonlóságok osztályozási tételei.

4. Szabadvektorok

A szabadvektorok fogalma; összeadása, skalárral való szorzása. Az összeadás és skalárral való szorzás műveleti tulajdonságai és ezek bizonyítása. Szabadvektorok lineáris függősége és függetlensége; a függőség és függetlenség geometriai jellemzése. Szabadvektorok skaláris szorzata, a skaláris szorzat tulajdonságai és bizonyításuk. Vektoriális szorzat. Egyenesek és síkok paraméteres előállítása, egyenletei, egyenletrendszerei. Tételek távolságának és szögének analitikus tárgyalása.

5. Körök, gömbök, másodrendű alakzatok

A körök és gömbök fogalma, egyenletei. Pont körre (gömbre) vonatkozó hatványa, inverzió. Az ellipszis, hiperbola és parabola geometriai értelmezése és forgáskúp síkmetszeteként való származtatása. A kúpszeletek kanonikus egyenleteinek levezetése. Kúpszeletpontok és kúpszeletérintők szerkesztése. A másodrendű görbék és felületek fogalma, osztályozása. Differenciálgeometriai vonatkozások.

6. Ívhossz, terület, térfogat

Területfüggvény az euklideszi sík sokszögeinek halmazán, nevezetes területképletek levezetése. A Jordan-mérték bevezetése az euklideszi síkon. A körlemez területképletének levezetése. A térfogatmérték a 3-dimenziós euklideszi térben, nevezetes térfogatképletek levezetése. Parametrizált görbék ívhossza, parametrizált felületek felszíne.

7. Vektorterek

A vektortér definíciója, példák vektortérre. A vektorterekkel kapcsolatos alapvető fogalmak (altér, alterek összege és direkt összege; lineáris függőség és függetlenség, generátorrendszer, bázis, dimenzió) és ezek fontosabb tulajdonságai. Lineáris sokaságok, faktortér. Az euklideszi vektortér fogalma, példák euklideszi vektortérre. Metrikus fogalmak euklideszi vektorterekben, a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség (bizonyítással) és alkalmazásai. Ortogonalitás, ortonormált bázis, a Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció. Altér ortogonális komplementere.

8. Lineáris leképezések

A lineáris leképezések fogalma; példák, elemi tulajdonságok. Vektorterek izomorfizmusa. A lineáris leképezések alaptétele, homomorfia-tétel, a nullitás+rang tétel. Lineáris leképezések mátrixreprezentációja. Sajátvektor, sajátérték, a karakterisztikus polinom. Diagonalizálhatósági kritériumok. Euklideszi vektorterek önadjungált és ortogonális transzformációinak szerkezete.

9. Affin és projektív geometria

Az affin és a projektív síkok axiómái, a dualitás elve. Kollineációk. Affin sík projektív lezárása. Analitikus modell az affin és a projektív síkokra. Affinitások, osztóviszony, az affinitások alaptétele, az affinitások és a kollineációk kapcsolata. Projektivitások, kettősviszony, a projektivitások alaptétele, a projektivitások és a kollineációk kapcsolata. Néhány nevezetes affin geometriai tétel. A Desargues-, a Pappos- és a Fano-féle tulajdonság.

10. Parametrizált görbék és felületek

A parametrizált görbék fogalma és alapvető adatai. A Frenet-féle apparátus: Frenet-féle háromélmező, görbület, torzió. A Frenet-formulák levezetése. A görbeelmélet alaptétele. A reguláris parametrizált felületek és a felületek fogalma, különböző megadásai. Érintősík, metrikus tenzor, 1. alaplanságok. Weingarten-operátor, 2. alaplanság, normálgörbület. Főgörbületek, főirányok, Gauss- és Minkowski-görbület. Geodetikusok. Belső geometriai adatok.

Megjegyzés. A tételsor a *Tantárgyi tematikák* c. kötet **M2702: Geometria szigorlat** címszavai alapján lett összeállítva. Nem került be a tételsorba a „lineáris egyenletrendszerek, mátrix rangja, rangszám-tétel, determináns” címszavaknak megfelelő tétel; ezeket a dolgokat fogalmi szinten ismerni kell, és tudni kell alkalmazni. Ugyancsak követelmény a tételekhez kapcsolódó középiskolai ismeretek és technikák biztos tudása. A szigorlaton egy tétel kerül kihúzásra.