Gazdasági matematika II.

Losonczi László, Pap Gyula

Debreceni Egyetem

II. félév

Előadó: **Hajdu Lajos**

Félévközi kötelező házi feladatok beadási határideje:

- Az 1. házi feladatot a szakhét előtti héten a gyakorlaton kell beadni a gyakorlatvezetőnek.
- A 2. házi feladatot a szorgalmi időszak utolsó előtti hetén kell beadni a gyakorlatvezetőnek.

Ezek teljesítése, valamint a gyakorlatra járás (legfeljebb 3 hiányzás) szükséges a gyakorlati aláíráshoz!

Vizsgaidőpontok:

Lásd Neptun.

Kötelező irodalom:

- Losonczi László
  Előadáskövető anyagok és feladatok
  http://www.math.klte.hu/~losi/huindex.htm
- Hajdu Lajos
  Előadáskövető anyagok és feladatok
  http://www.math.klte.hu/~hajdul

Ajánlott irodalom:

- KNUT SYDSAETER és PETER HAMMOND
  Matematika közgazdászoknak
  Aula, 1998.
- DENKINGER GÉZA
  Analízis: gyakorlatok
  Nemzeti Tankönyvkiadó, 1999.
- DENKINGER GÉZA
  Valószínűségszámítás
  Tankönyvkiadó, 1982.
- HATVANI LÁSZLÓ
  Kalkulus közgazdászoknak
  Polygon, Szeged, 2007.

Ajánlott irodalom:

- Kovács Zoltán
  Feladatgyűjtemény lineáris algebra gyakorlatokhoz
  Kossuth Egyetemi Kiadó, 2005.
- Gáspár László
  Lineáris algebra példatár
  Tankönyvkiadó, 1971.
- Denkinger Géza
  Valószínűségszámítás példatár
  Tankönyvkiadó, 1971.
- Kozma László
  Matematikai alapok
  Studium Kiadó, 1999.

Az $\mathbb{R}^k$ vektortér

$$\mathbb{R}^k := \{(x_1, x_2, \dots, x_k) : x_i \in \mathbb{R} \text{ minden } i = 1, 2, \dots, k \text{ esetén}\}.$$

- Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ sorozatok **a tér pontjai.**
- Az $x_1, x_2, \dots, x_k$ számok az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ **pont koordinátái.**
- $\mathbb{R}^k$ **pontjait vektorokként is felfoghatjuk** (koordinátarendszer felvétele után az egyes pontoknak a kezdőpontból hozzájuk vezető irányított szakaszt feleltetjük meg).

Összeadás $\mathbb{R}^k$-ban

Az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ és $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ **vektorok összege**

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_k + y_k).$$

Skalárral való szorzás $\mathbb{R}^k$-ban

Az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ **vektor** $\lambda \in \mathbb{R}$ **skalárral való szorzata**

$$\lambda x := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_k).$$

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai

- *Bármely* $x, y, z \in \mathbb{R}^k$ *esetén a* $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ *zérusvektorral és* $-x := (-1)x$ *ellentett vektorral*

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x + y) + z, \\ x + y &= y + x, \\ x + 0 &= x, \\ x + (-x) &= 0. \end{aligned}$$

- *Bármely* $x, y \in \mathbb{R}^k$ *és bármely* $\lambda, \mu, 1 \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\begin{aligned} \lambda(x + y) &= \lambda x + \lambda y, \\ (\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x, \\ (\lambda\mu)x &= \lambda(\mu x), \\ 1x &= x. \end{aligned}$$

Lineáris kombináció

Az $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ együtthatókkal képezett **lineáris kombinációján** a

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$$

vektort értjük.

Lineáris függetlenség, függőség

Az $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^k$ vektorrendszert **lineárisan függetlennek** nevezzük, ha

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$$

csak $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ esetén áll fenn.

Egy vektorrendszert **lineárisan függőnek** nevezünk, ha nem lineárisan független.

Ha $a_1, \dots, a_n$ *lineárisan függő, akkor léteznek olyan* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *együtthatók, melyek nem mind zérusok, és*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0.$$

Ezért van olyan $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$ *index, hogy* $\lambda_\ell \neq 0$, *így osztva* λ_ℓ*-lel*

$$a_\ell = -\frac{\lambda_1}{\lambda_\ell} a_1 - \dots - \frac{\lambda_{\ell-1}}{\lambda_\ell} a_{\ell-1} - \frac{\lambda_{\ell+1}}{\lambda_\ell} a_{\ell+1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_\ell} a_n,$$

azaz ***az*** a_ℓ ***vektor kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként.***

Lineáris függetlenség

Az $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ *vektorrendszer akkor és csakis akkor lineárisan független, ha*

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n, \qquad b = \lambda'_1 a_1 + \dots + \lambda'_n a_n$$

csak $\lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_n = \lambda'_n$ *esetén teljesül.*

*Az $\mathbb{R}^k$ vektortér k **dimenziós** abban az értelemben, hogy van $\mathbb{R}^k$-ban k darab lineárisan független vektor, de bárhogyan is választunk $k+1$ darab vektort $\mathbb{R}^k$-ból, azok lineárisan függők.*

Bázis

Az $\mathbb{R}^k$ vektortér bármely k számú lineárisan független $b_1, \dots, b_k$ vektorát a **tér bázisának** nevezzük.

Koordináták

Ha $b_1, \dots, b_k$ az $\mathbb{R}^k$ vektortér egy bázisa, akkor a tér minden v vektora egyértelműen írható

$$v = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k$$

*alakban. Az itt szereplő $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ skalárokat a v vektor $b_1, \dots, b_k$ bázisára vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük.*

Példa. Az

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots \quad e_k = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^k$$

vektorok az $\mathbb{R}^k$ tér egy bázisát alkotják, melyet **természetes bázisnak** nevezünk.

Ha $v = (v_1, v_2, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^k$, akkor

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_k) = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_k e_k,$$

így v koordinátái azonosak v-nek a természetes bázisra vonatkozó koordinátáival.

Altér

Az $\mathbb{R}^k$ vektortér **alterén** $\mathbb{R}^k$ olyan L részhalmazát értjük, mely nem üres és zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve, azaz $a, b \in L$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $a + b \in L$ és $\lambda a \in L$ teljesül.

Vektorrendszer által generált altér

Egy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorrendszert tartalmazó legszűkebb alteret a **vektorrendszer által generált/kifeszített altérnek** nevezzük.
Jelölés: $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\},$$

*azaz egy vektorrendszer által generált altér azonos a vektorrendszer vektoraiból képezhető **összes lineáris kombinációk halmazával**.*

Altér dimenziója

Egy L **altér dimenziója** r, ha van L-ben r darab lineárisan független vektor, de akárhogyan választunk $r+1$ darab vektort L-ből, azok lineárisan függőek.

Vektorrendszer rangja

Egy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **vektorrendszer rangjának** az általa generált $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ altér dimenzióját nevezzük.

Vektorrendszer rangja

Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorrendszer rangja megegyezik e rendszerből kiválasztható maximális számú, lineárisan független vektorok számával.

Vektorrendszer által generált altér

Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *vektorrendszer által generált altér nem változik meg (és így a vektorrendszer rangja sem változik), ha*

- *megváltoztatjuk a vektorok sorrendjét,*
- *vagy valamelyik vektort egy* $\lambda \neq 0$ *skalárral megszorozzuk,*
- *vagy valamelyik vektorához egy másik vektorát hozzáadjuk.*

$k \times n$ típusú (valós) mátrix

Ha $k \cdot n$ darab (valós) számot, az $\{a_{ij} : i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ számokat, k sorban és n oszlopban helyezünk el az alábbi módon:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

akkor egy $k \times n$ **típusú (valós) mátrixot** definiáltunk. Az összes $k \times n$ típusú mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{k \times n}$ jelöli. A típus megadásánál **mindig a sorok száma** az első adat!

a_{ij} az A mátrix i-edik sorának j-edik eleme, vagy az A mátrix (i, j)-edik eleme. Használjuk az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ tömör jelölést is, ha ez nem okoz félreértést.

Az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix ***i*-edik sorvektora/sormátrixa** és ***j*-edik oszlopvektora/oszlopmátrixa**

$$s_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}, \qquad o_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{pmatrix}$$

Speciális mátrixok

- Az A mátrix **négyzetes vagy kvadratikus**, ha n sora és n oszlopa van, azaz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Diagonálisa (főátlója) : $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$.
- ***n*-edrendű egységmátrix:** az az n-edrendű $E = E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kvadratikus mátrix, melynek főátlójában csupa 1 áll, azon kívül pedig csupa 0 áll.
- **$k \times n$ típusú zérusmátrix:** az a $k \times n$ típusú $O = O_{k \times n} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, melynek minden eleme 0.

Mátrix transzponáltja

Az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ **mátrix transzponáltján** az

$$A^\top := (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

mátrixot értjük (a mátrix sorait és oszlopait megcserélve kapjuk a mátrix transzponáltját).

Azonos típusú mátrixok összeadása és számmal való szorzása

Legyenek $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ **azonos típusú mátrixok** és legyen $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor az $A + B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ és $\lambda A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrixok definíciója:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}, \quad \lambda A := (\lambda a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}.$$

Az összeadás, számmal való szorzás és transzponálás tulajdonságai

Az összes $k \times n$ *típusú valós mátrixok* $\mathbb{R}^{k\times n}$ *halmazában az összeadás és a számmal való szorzás ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint az* $\mathbb{R}^{\ell}$ *vektortérben.*

Továbbá bármely $A, B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$(A+B)^\top = A^\top + B^\top, \qquad (\lambda A)^\top = \lambda A^\top.$$

Két **mátrix szorzata csak akkor értelmezett**, ha az első mátrixnak annyi oszlopa van, mint ahány sora van a második mátrixnak.

Mátrixok szorzata

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrixok $C = AB$ **szorzatán** azt a $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times m}$ mátrixot értjük, melyre

$$c_{ij} := \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

ha $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, m$.

Ezt a szorzást röviden "**sor-oszlop kombinációnak**" mondjuk, mert a szorzatmátrix c_{ij} eleme éppen az A mátrix i-edik sorvektorának és a B mátrix j-edik oszlopvektorának a belső szorzata $\mathbb{R}^n$-ben.

Mátrixok szorzásának tulajdonságai

$$A(BC) = (AB)C,$$
$$(A+B)C = AC + BC,$$
$$A(B+C) = AB + AC,$$
$$(AB)^\top = B^\top A^\top,$$
$$AO = OA = O,$$

ahol A, B, C, O *olyan mátrixok, melyekre a felírt műveleteknek van értelme.* *Kvadratikus A mátrixokra*

$$AE = EA = A.$$

A mátrixszorzás **nem kommutatív**, azaz általában $AB \neq BA$.

Kvadratikus mátrix inverze

Egy A kvadratikus mátrixot **invertálhatónak nevezünk,** ha van olyan B (kvadratikus) mátrix, melyre

$$AB = BA = E$$

teljesül. Ezt a B mátrixot A **inverzének nevezzük** és A^{-1}-gyel jelöljük.

Ha A invertálható, akkor csak egy inverze van. Ugyanis, ha B' is A inverze volna, akkor $AB' = B'A = E$ miatt

$$B = BE = B(AB') = (BA)B' = EB' = B' \qquad \text{azaz} \qquad B = B'.$$

Permutációk

Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok egy $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ elrendezését ezen elemek egy **permutációjának** nevezzük.
Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok összes permutációinak halmazát $\mathcal{S}_n$ jelöli.
Egy $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{S}_n$ permutációban a (α_i, α_j) **pár inverzióban** áll, ha $i < j$ és $\alpha_i > \alpha_j$.
Egy α permutáció inverzióinak számát (az inverzióban álló párok számát) $I(\alpha)$ jelöli.

Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok összes permutációinak száma $n!$.

Determináns definíciója

Egy n-edrendű kvadratikus A mátrix *determinánsán* az

$$|A| := \sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$$

számot értjük, ahol az összegezés kiterjed az 1, 2, ..., n számok összes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ permutációjára, és $I(\alpha)$ az α permutáció inverzióinak száma.

Másod és harmadrendű determinánsok kiszámítása a definíció alapján

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{array}$$

A determináns alaptulajdonságai

1. *Bármely A kvadratikus mátrixra teljesül* $\det(A^\top) = \det(A)$.
2. *Ha egy sor minden elemét c-vel szorozzuk, akkor a determináns értéke c-szeresére változik.*
3. *Ha két sort felcserélünk, akkor a determináns előjelet vált.*
4. *Ha két sor megegyezik, akkor a determináns értéke nulla.*
5. *A determináns értéke nem változik, ha egy sorának elemeihez egy másik sor megfelelő elemeinek c-szeresét hozzáadjuk.*
6. *Ha egy sor minden eleme két tag összegére bomlik, akkor a determináns felirható két olyan determináns összegeként, melyek megfelelő soraiban éppen az egyes összeadandók állnak.*
7. *Ha egy sorban csupa 0 áll, akkor a determináns értéke nulla.*
8. *Az egységmátrixok determinánsa 1.*

Adjungált aldetermináns

Egy n-edrendű kvadratikus $A = (a_{ij})$ mátrixból, elhagyva az a_{ij} elem sorát és oszlopát, és a visszamaradó $n-1$-edrendű kvadratikus mátrix determinánsát $(-1)^{i+j}$-vel megszorozva kapott számot az *A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsnak nevezzük*, és A_{ij}-vel jelöljük.

Kifejtési tétel

Bármely n-edrendű kvadratikus A mátrix esetén

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{i'j} = \begin{cases} |A| & \text{ha } i = i' \\ 0 & \text{ha } i \neq i' \end{cases} \quad (i, i' = 1, \ldots, n, \text{ ez a sor szerinti kifejtés}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij'} = \begin{cases} |A| & \text{ha } j = j' \\ 0 & \text{ha } j \neq j' \end{cases} \quad (j, j' = 1, \ldots, n, \text{ez az oszlop szerinti kife}$$

Determinánsok szorzástétele

Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *azonos rendű kvadratikus mátrixok, akkor*

$$|AB| = |A|\,|B|.$$

Inverz mátrix előállítása

Egy (kvadratikus) mátrix akkor és csakis akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla. Egy $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *n-edrendű invertálható kvadratikus mátrix* $A^{-1} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *inverzének elemei*

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

ahol A_{ji} a j-edik sor i-edik eleméhez tartozó adjungált aldetermináns.

Mátrix rangja

Egy A **mátrix** $\operatorname{rang}(A)$ **rangján** oszlopvektorainak rangját értjük (ami a maximális lineárisan független oszlopvektorok száma).

A zérusmátrixok rangja nulla.

Aldetermináns

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ egy $k \times n$ típusú mátrix, és $1 \leq \ell \leq \min\{k, n\}$. Az A **egy** ℓ**-edrendű aldeterminánsát** úgy kapjuk, hogy kiválasztjuk a mátrix ℓ darab sorát és ℓ darab oszlopát, és képezzük az ezek metszetében lévő elemekből alkotott ℓ-edrendű determinánst.

Rangszámtétel

Bármely (nemzérus) mátrix rangja megegyezik a maximális rendű nullától különböző aldeterminánsainak rendjével.

Egy mátrix sorvektorainak rangja egyenlő az oszlopvektorainak rangjával. Egy (kvadratikus) mátrix akkor és csakis akkor invertálható, ha a mátrix oszlopvektorai (vagy sorvektorai) lineárisan függetlenek.

Lineáris egyenletrendszernek nevezzük az

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{k1}\,x_1 + a_{k2}\,x_2 + \cdots + a_{kn}\,x_n &= b_k \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol a_{ij}, b_i $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n)$ **adott** valós számok, x_i $(i = 1, \ldots, n)$ **ismeretlen** valós számok.
Az a_{ij} számokat a rendszer **együtthatóinak** nevezzük, b_i az i-edik egyenlet **szabad tagja**.
Az egyenletrendszert **homogénnek** nevezzük, ha $b_1 = \cdots = b_k = 0$, ellenkező esetben **inhomogénnek** mondjuk.
Az egyenletrendszert **szabályosnak** nevezzük, ha $k = n$, azaz ha az egyenletek és ismeretlenek száma egyenlő.

Tömören:

$$Ax = b,$$

ahol

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times n},$$

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \qquad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times 1}.$$

Alapvető kérdések:

- Van-e az egyenletrendszernek megoldása, és ha igen, akkor egyértelmű-e?
- Hogyan határozhatjuk meg az összes megoldást?

Egy (lineáris) egyenletrendszer

- **megoldható**, ha van megoldása;
- **ellentmondásos**, ha nincs megoldása;
- **határozott**, ha pontosan egy megoldás létezik;
- **határozatlan**, ha több megoldás van.

Ekvivalens átalakítások

Két **egyenletrendszert ekvivalensnek** nevezünk, ha megoldásaik halmaza egyenlő.

Ekvivalens átalakítások

Lineáris egyenletrendszerek esetén az alábbi átalakítások ekvivalens rendszereket eredményeznek:

- *az egyenletek sorrendjének megváltoztatása;*
- *az egyenletekben szereplő tagok sorrendjének megváltoztatása;*
- *a rendszer bármelyik egyenletének szorzása (minden tag szorzása) egy nemzérus számmal;*
- *a rendszer bármelyik egyenletének hozzáadása egy másik egyenletéhez.*

Trapéz alakú lineáris egyenletrendszer

Az egyenletrendszert akkor nevezzük **trapéz alakúnak**, ha van olyan $r \in \{1, \ldots, n\}$ szám, hogy

- $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, ..., $a_{rr} \neq 0$,
- $a_{ij} = 0$, ha $i = 1, 2, \ldots, r$ és $j < i$,
- $a_{ij} = 0$, ha $i > r$ és $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ha $r = n$, akkor a rendszert **háromszögalakúnak** nevezzük.

Gauss-elimináció

Az ismeretlenek szukcesszív (fokozatos) kiküszöbölésével az egyenletrendszert trapéz alakra hozzuk a következő lépésekkel:

- Tegyük fel, hogy $a_{11} \neq 0$. Az első egyenlet $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$-szeresét az i-edik egyenlethez hozzáadva $i = 2, 3, \ldots, k$ esetén, az x_1 ismeretlen eltűnik a második, harmadik, ... k-adik egyenletből. Ha $a_{11} = 0$, akkor az első egyenletben keresünk egy ismeretlent, melynek együtthatója $\neq 0$, és ez veszi át x_1 szerepét.
- Ezután a második egyenlet alkalmas konstanszorosainak a harmadik ... k-adik egyenlethez való hozzádásával kiküszöböljük a harmadik ismeretlent a negyedik, ... k-adik egyenletből.
- Az eljárást hasonlóan folytatjuk, míg van mit kiküszöbölni.

Trapéz alakú lineáris egyenletrendszer megoldhatósága

Egy trapéz alakú egyenletrendszernek

- *akkor és csakis akkor van megoldása, ha a trapéz alakban az $r+1$-edik egyenlettől kezdve a szabad tagok mind nullák;*
- *megoldható esetben akkor és csakis akkor van pontosan egy megoldása, ha $r = n$, azaz ha a rendszer háromszögalakú;*
- *akkor és csakis akkor van több megoldása, ha $r < n$; ebben az esetben végtelen sok megoldása van, és a megoldások egy $n - r$ paraméteres sereget alkotnak.*

Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága

Az $Ax = b$ $(A \in \mathbb{R}^{k\times n},\ x \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ b \in \mathbb{R}^{k\times 1})$ *inhomogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van megoldása, ha a*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A \,|\, b)$$

rangfeltétel *teljesül, ahol* A *a rendszer együtthatómátrixa,* $(A \,|\, b)$ *pedig a bővített mátrix, melyet az* A *mátrixból úgy kapunk, hogy az* A *mátrixhoz* $n+1$*-edik oszlopként hozzáírjuk a szabad tagok* b *oszlopvektorát.*

Homogén rendszer esetén (amikor $b_1 = \cdots = b_k = 0$), mindig van megoldás: az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ **triviális megoldás.**

Homogén rendszer nemtriviális megoldásának létezése

Az $Ax = 0$ $(A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1})$ homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van triviálistól különböző megoldása, ha

$$\operatorname{rang} A < n,$$

azaz ha a rendszer A mátrixának rangja kisebb mint az ismeretlenek száma. Ha ez teljesül, akkor a homogén rendszer összes megoldásai $\mathbb{R}^n$-nek egy

$$n - \operatorname{rang} A$$

dimenziós alterét alkotják.

Lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazának szerkezete

Az

$$Ax = b \qquad (A \in \mathbb{R}^{k\times n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad b \in \mathbb{R}^{k\times 1})$$

inhomogén *lineáris egyenletrendszer bármely* x *megoldása*

$$x = x' + x^{\mathrm{h}}$$

alakba írható, ahol x' *az inhomogén egyenlet egy* ***rögzített*** *(partikuláris) megoldása,* x^{h} *pedig a megfelelő*

$$Ax = 0$$

homogén *egyenletrendszer egy tetszőleges megoldása.*
Így a megoldások halmaza a homogén egyenletrendszer megoldásalterének az x' *vektorral való eltoltja.*

Cramer-szabály

Legyen A egy n-edrendű kvadratikus mátrix. Az

$$Ax = b \qquad (A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad b \in \mathbb{R}^{n\times 1})$$

(szabályos) lineáris egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van pontosan egy megoldása, ha

$$|A| \neq 0.$$

Ha ez teljesül, akkor a rendszer egyetlen megoldása

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol A_i az a mátrix, melyet az A mátrixból úgy kapunk, hogy annak i-edik oszlopát a szabad tagok b (oszlop)vektorára cseréljük ki.

Szabályos homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásának létezése

Legyen A egy n-edrendű kvadratikus mátrix. Az

$$Ax = 0 \qquad (A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n \times 1})$$

(szabályos) homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van nemtriviális megoldása, ha

$$|A| = 0.$$

Lineáris leképezés/operátor/transzformáció

A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezést **lineáris leképezésnek** nevezzük, ha bármely $x, y \in \mathbb{R}^n$ és bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \qquad \text{(azaz } \varphi \text{ additív),}$$
$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \qquad \text{(azaz } \varphi \text{ homogén).}$$

Lineáris leképezés megadása mátrix segítségével

Ha $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *lineáris leképezés,* $b_1, \ldots, b_n$ *az* $\mathbb{R}^n$ *egy bázisa, és* $A_\varphi = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *az a mátrix, melyre*

$$\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i \qquad \text{minden } j = 1, \ldots, n \text{ esetén,}$$

akkor minden $x = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j \in \mathbb{R}^n$ *esetén* $\varphi(x) = y = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i$*, ahol*

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad \text{minden } i = 1, \ldots, n \text{ esetén.}$$

Bizonyítás:

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(b_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) b_i.$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

azaz mátrixos formában:

$$\varphi(x) = y = A_\varphi x.$$

Lineáris leképezés mátrixa

Azt mondjuk, hogy az A_φ (n-edrendű kvadratikus) mátrix a φ **lineáris leképezés mátrixa a $b_1, \dots, b_n$ bázisban.**

Rögzített bázis esetén a $\varphi \mapsto A_\varphi$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezések és az $A_\varphi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok között.

Lineáris leképezések összege, számszorosa és kompoziciója

$$\begin{aligned}
(\varphi+\psi)(x) &:= \varphi(x)+\psi(x) && (x \in \mathbb{R}^n),\\
(\lambda\varphi)(x) &:= \lambda\varphi(x) && (\lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n),\\
(\varphi \circ \psi)(x) &:= \varphi(\psi(x)) && (x \in \mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

A $\varphi \mapsto A_\varphi$ hozzárendelés tulajdonságai

Rögzített bázis és tetszőleges $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *lineáris leképezések esetén*

$$\begin{aligned}
A_{\varphi+\psi} &= A_\varphi + A_\psi,\\
A_{\lambda\varphi} &= \lambda A_\varphi,\\
A_{\varphi\circ\psi} &= A_\varphi A_\psi.
\end{aligned}$$

Továbbá $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *akkor és csakis akkor kölcsönösen egyértelmű, ha* A_φ *invertálható.*

Lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ *és* $b'_1, \ldots, b'_n$ *az* $\mathbb{R}^n$ *tér két bázisa, és*

$$A_\varphi = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \textit{ahol} \quad \varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i,$$

$$A'_\varphi = (a'_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \textit{ahol} \quad \varphi(b'_j) = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} b'_i$$

a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *lineáris leképezés mátrixai. Akkor van olyan* $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertálható mátrix, hogy*

$$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi S.$$

Kvadratikus mátrix sajátértéke, sajátvektora

A $\lambda \in \mathbb{R}$ számot az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix **sajátértékének** nevezzük, ha van olyan nullától különböző $x \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre

$$Ax = \lambda x$$

teljesül. Az x vektort az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó **sajátvektorának** nevezzük.

Más alakban:

$$(A - \lambda E)x = 0.$$

Ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van nemtriviális megoldása, ha

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Ezt a determinánst kifejtve egy λ-ban n-edfokú polinomot kapunk. Ennek zérushelyei adják A sajátértékeit.

Diagonális mátrix

Egy $n \times n$-es D mátrixot **diagonálisnak** nevezünk, ha a főátlón kívüli elemei mind zérusok. Jelölés:

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Kvadratikus mátrix diagonális alakra hozása

Egy $n \times n$-es A mátrixot **diagonalizálhatónak** (diagonális alakra hozhatónak) nevezünk, ha van olyan invertálható $n \times n$-es S mátrix és egy D diagonális mátrix, melyekre

$$S^{-1} A S = D.$$

Ha A és S két $n \times n$-es mátrix és S invertálható, akkor az A és $S^{-1}AS$ mátrixok sajátértékei megegyeznek.

Bizonyítás:

$$\det(S^{-1}AS - \lambda E) = \det\left(S^{-1}AS - S^{-1}(\lambda E)S\right) = \det\left(S^{-1}(A - \lambda E)S\right)$$
$$= \det(S^{-1})\det(A - \lambda E)\det(S) = \det(A - \lambda E).$$

A diagonalizálhatóság kritériuma

Egy $n \times n$-es A mátrix akkor és csakis akkor diagonalizálható, ha van n lineárisan független sajátvektora, $x_1, \ldots, x_n$. Ekkor

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ahol az S mátrix oszlopvektorai rendre $x_1, \ldots, x_n$, a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ számok pedig a hozzájuk tartozó sajátértékek.

Szimmetrikus és ortogonális mátrixok

Egy kvadratikus A mátrixot **szimmetrikusnak** nevezünk, ha $A^\top = A$, illetve **ortogonálisnak** nevezünk, ha $A^\top A = E$.

Ortogonális/merőleges vektorok

Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorok akkor **ortogonálisak**, ha $\langle x, y \rangle = 0$.

Ortogonális mátrixok

Egy kvadratikus A mátrix esetén a következő állítások ekvivalensek:

- A *ortogonális;*
- A *invertálható, és* $A^{-1} = A^\top$*;*
- A *sorvektorai egységvektorok és páronként ortogonálisak;*
- A *oszlopvektorai egységvektorok és páronként ortogonálisak.*

Szimmetrikus mátrixok sajátértékei és sajátvektorai

Ha A *egy kvadratikus szimmetrikus mátrix, akkor*

- A *sajátértékei mind valós számok;*
- A *különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.*

Szimmetrikus mátrixok spektráltétele

Ha A *egy* $n \times n$*-es szimmetrikus mátrix, akkor létezik olyan ortogonális* U *mátrix, amelyre*

$$U^{-1} A U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *az* A *sajátértékei, az* U *mátrix* i*-edik oszlopa pedig a* λ_i*-hez tartozó sajátvektora* $(i = 1, \dots, n)$.

Bilineáris és kvadratikus függvények

Ha $A = \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor

- az $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x,y) := \langle Ax, y\rangle$, $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ függvényt **bilineáris függvénynek/formának** nevezzük;
- a $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $Q(x) := \langle Ax, x\rangle$, $(x \in \mathbb{R}^n)$ függvényt **kvadratikus függvénynek/formának** nevezzük.

Tehát ha $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_n) = \langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

így feltehető, hogy A **szimmetrikus mátrix.** Ezért létezik olyan U ortogonális mátrix, melyre

$$U^{-1} A\, U = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n),$$

ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ az A sajátértékei. Innen

$$A = U\, D\, U^{-1} = U\, D\, U^{\top},$$

ezért $y := U^{\top} x$ jelöléssel

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle U\, DU^{\top} x, x \rangle = \langle D\, U^{\top} x, U^{\top} x \rangle = \langle Dy, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

Ezt a Q kvadratikus forma **kanonikus alakjának** nevezzük.

Kvadratikus függvény pozitív/negatív definitsége

Egy szimmetrikus $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrixszal képezett*

$$Q(x) := \langle Ax, x\rangle \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

kvadratikus függvényt

- ***pozitív definitnek nevezünk**, ha* $Q(x) > 0$ *minden* $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ *mellett,*
- ***negatív definitnek nevezünk**, ha* $Q(x) < 0$ *minden* $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ *mellett,*
- ***indefinitnek nevezünk**, ha Q felvesz pozitív és negatív értékeket is.*

Kritérium kvadratikus függvény definitségére

Egy szimmetrikus $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *mátrixszal képezett*

$$Q(x) := \langle Ax, x \rangle \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

kvadratikus függvény akkor és csakis akkor

- ***pozitív definit**, ha* A *összes sajátértéke pozitív,*
- ***negatív definit**, ha* A *összes sajátértéke negatív,*
- ***indefinit**, ha* A*-nak van pozitív és negatív sajátértéke is.*

Kritérium kvadratikus függvény definitségére

Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *szimmetrikus mátrix, és legyen* Δ_k $(k = 1, \dots, n)$ *az* A *mátrix bal felső* k*-adrendű sarokdeterminánsa (sarokfőminora), azaz*

$$\Delta_1 := a_{11}, \quad \Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \dots \quad \Delta_n := |A|,$$

akkor a

$$Q(x) := \langle Ax, x \rangle \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

kvadratikus függvény akkor és csakis akkor

- ***pozitív definit**, ha* $\Delta_k > 0$ *minden* $k = 1, \dots, n$ *esetén;*
- ***negatív definit**, ha* $(-1)^k \Delta_k > 0$ *minden* $k = 1, \dots, n$ *esetén.*

Skaláris/belső szorzás $\mathbb{R}^k$-ban

Az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ és $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ **vektorok skaláris vagy belső szorzata**

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_k y_k.$$

A skaláris/belső szorzás tulajdonságai

Bármely $x, y, z \in \mathbb{R}^k$ *és bármely* $\lambda \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \qquad \text{és } \langle x, x \rangle = 0 \text{ akkor és csakis akkor, ha } x = 0.$$

Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség

Bármely két $x, y \in \mathbb{R}^k$ *vektor esetén* $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$.

Vektor hossza/normája

Az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ **vektor hossza/normája** $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

A hossz/norma tulajdonságai

Bármely $x, y \in \mathbb{R}^k$ *és bármely* $\lambda \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\|x\| \geq 0, \qquad \text{és } \|x\| = 0 \text{ akkor és csakis akkor, ha } x = 0,$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|,$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Pontok távolsága

Az $x, y \in \mathbb{R}^k$ pontok **távolsága** $d(x, y) := \|x - y\|$.

Pont (nyílt) környezete

Egy $a \in \mathbb{R}^k$ **pont** $\varepsilon > 0$ **sugarú (nyílt) környezetén** a

$$K(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^k : d(x, a) = \|x - a\| < \varepsilon\}$$

halmazt értjük.

$k = 1$ esetén $K(a, \varepsilon)$ az a pontra nézve **szimmetrikus** 2ε hosszúságú $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ **nyílt intervallum.**

$k = 2$ esetén $K(a, \varepsilon)$ az $a = (a_1, a_2)$ pont körüli ε sugarú **nyílt körlap.**

$k = 3$ esetén $K(a, \varepsilon)$ az $a = (a_1, a_2, a_3)$ pont körüli ε sugarú **nyílt gömb.**

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$-ban

- Az $a \in \mathbb{R}^k$ pontot az $A \subset \mathbb{R}^k$ **halmaz belső pontjának** nevezzük, ha a-nak van olyan környezete, mely A-ban van (azaz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $K(a,\varepsilon) \subset A$).
- Az $a \in \mathbb{R}^k$ pontot az $A \subset \mathbb{R}^k$ **halmaz izolált pontjának** nevezzük, ha $a \in A$, és a-nak van olyan környezete, melyben a-n kívül nincs A-beli pont (azaz $a \in A$, és van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $(K(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset$).
- Az $a \in \mathbb{R}^k$ pontot az $A \subset \mathbb{R}^k$ **halmaz torlódási pontjának** nevezzük, ha a bármely környezetében van tőle különböző A-beli pont (azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén $(K(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$).
- Az $a \in \mathbb{R}^k$ pontot az $A \subset \mathbb{R}^k$ **halmaz határpontjának** nevezzük, ha a bármely környezetében van A-beli és nem A-beli pont is (azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén $K(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ és $K(a,\varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$, ahol $\overline{A} := \mathbb{R}^k \setminus A$ az A halmaz komplementere).

- Az $A \subset \mathbb{R}^k$ halmazt **nyíltnak** nevezzük, ha minden pontja belső pontja A-nak.
- Az $A \subset \mathbb{R}^k$ halmazt **zártnak** nevezzük, ha komplementere nyílt.

Sorozat $\mathbb{R}^k$-ban

Egy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$ függvényt $\mathbb{R}^k$-beli **sorozatnak** nevezünk. Jelölés: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ahol $a_n := a(n)$, és $a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk})$, ha $n \in \mathbb{N}$.

Konvergens sorozat $\mathbb{R}^k$-ban

Az $\mathbb{R}^k$-beli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot **konvergensnek** nevezzük, ha van olyan $b \in \mathbb{R}^k$, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$\|a_n - b\| < \varepsilon \quad \text{amennyiben} \quad n > N(\varepsilon).$$

A b pontot a sorozat **határértékének** (limeszének) nevezzük. Jelölés:

$$a_n \to b \quad \text{ha} \quad n \to \infty, \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

Egy $\mathbb{R}^k$-beli sorozatot **divergensnek** nevezünk, ha nem konvergens.

$\mathbb{R}^k$-beli konvergencia = koordinátánkénti konvergencia

$$a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nk}) \to b = (b_1, b_2, \ldots, b_k) \quad ha \quad n \to \infty$$

akkor és csakis akkor, ha

$$a_{ni} \to b_i \quad ha \quad n \to \infty \qquad minden \;\; i = 1, 2, \ldots, k \;\; esetén.$$

Ez azt jelenti, hogy egy vektorsorozat akkor és csakis akkor konvergens, ha a sorozat minden koordinátája konvergens, és határértéke a határvektor megfelelő koordinátája.

Egy $D \subset \mathbb{R}^k$ halmaz torlódási pontjainak halmazát D'-vel jelöljük.

Többváltozós függvény határértéke

Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ és legyen $x_0 \in D'$. Azt mondjuk, hogy f-nek van (véges, vagy végtelen) **határértéke** az x_0 pontban, ha van olyan $a \in \mathbb{R}_\mathrm{b}$ bővített valós szám, hogy bármely olyan D-beli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ és $x_n \neq x_0$, teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ egyenlőség.
$a \in \mathbb{R}_\mathrm{b}$-t az f függvény x_0 pontbeli határértékének nevezzük és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$-vel, vagy $f(x) \to a$ $(x \to x_0)$-vel jelöljük.

Átfogalmazás

Másképpen megfogalmazva: az f függvény értelmezési tartományának egy $x_0 \in \mathbb{R}_\flat$ torlódási pontjában akkor és csakis akkor lesz f határértéke az $a \in \mathbb{R}_\flat$ bővített valós szám, ha az értelmezési tartományból bármely x_0-hoz konvergáló $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot véve, melynek elemei x_0-tól különbözőek, a függvényértékek $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata a-hoz tart.

Határérték egyértelműsége

Függvény határértéke, ha létezik, akkor egyértelmű.

Határérték **létezhet az x_0 pontban akkor is, ha a függvény nincs értelmezve a pontban**, de torlódási pontja annak (egy halmaz torlódási pontja ugyanis nem feltétlenül pontja a halmaznak).
A műveletek, egyenlőtlenségek és határérték kapcsolata most is érvényes.

Függvény folytonossága

Az $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt **folytonosnak** nevezzük az $x_0 \in D$ pontban, ha bármely D-beli x_0-hoz konvergáló $D \ni x_n \to x_0\,(n \to \infty)$ sorozat esetén a függvényértékek $f(x_n)\,(n \in \mathbb{N})$ sorozata az x_0 pontbeli függvényértékhez tart, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Röviden: az f függvény $x_0 \in D$ pontbeli folytonossága azt jelenti, hogy ha $D \ni x_n \to x_0\,(n \to \infty)$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = f(x_0)$.

- *Ha $x_0 \in D \cap D'$, akkor f folytonos x_0-ban akkor, és csakis akkor, ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*
- *Ha $x_0 \in D$, de $x_0 \notin D'$, akkor x_0 a D **izolált pontja**, izolált pontokban f a definíció alapján mindig folytonos.*

Folytonos függvények tulajdonságai ugyanazok, mint az egyváltozós esetben.

(Totális) differenciálhatóság

Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ belső pontban **(totálisan) differenciálhatónak** nevezzük, ha van olyan $A \in \mathbb{R}^k$ vektor, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle A, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Az $f'(x_0) := A$ vektort az f függvény x_0 **pontbeli deriváltjának** nevezzük.

GEOMETRIAI JELENTÉS: a függvény $f(x) - f(x_0)$ növekményét az $\langle f'(x_0), x - x_0 \rangle$ lineáris függvény jól közelíti x_0 közelében; a függvény által meghatározott felületnek x_0-ban **van érintősíkja**, mégpedig az

$$x_{k+1} = f(x_0) + \langle f'(x_0), x - x_0 \rangle$$

hipersík az $\mathbb{R}^{k+1}$ térben.

Irány menti differenciálhatóság

Legyen $e \in \mathbb{R}^k$ egy egységvektor, azaz $\|e\| = 1$. Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ belső pontban az e **irány mentén differenciálhatónak** nevezzük, ha létezik a

$$D_e f(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

(véges) határérték, melyet az f függvény e **iránymenti deriváltjának** nevezünk az x_0 pontban.

$D_e f(x_0)$ jelentése: az f **függvény változási sebessége** az e irányában.

Parciális derivált

Legyen $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, és legyen $u_i \in \mathbb{R}^k$ az i-edik tengely irányába mutató egységvektor (az u_i vektor i-edik koordinátája 1, a többi 0).
Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pontban létezik az ***i*-edik változója szerinti parciális deriváltja**, ha differenciálható az u_i irányban. Jelölése: $\partial_i f(x_0) := D_{u_i} f(x_0)$.

Egyéb jelölések: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ és $f_{x_i}(x_0)$

Parciális differenciálhatóság

Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ belső pontban **parciálisan differenciálhatónak** nevezzük, ha $\partial_i f(x_0)$ minden $i = 1, 2, \dots, k$ esetén létezik.

Parciális derivált kiszámítása

Mivel $x_i = x_{0i} + t$ helyettesítéssel

$$\partial_i f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_{01}, \ldots, x_{0i} + t, \ldots, x_{0k}) - f(x_{01}, \ldots, x_{0i}, \ldots, x_{0k})}{t}$$

$$= \lim_{x_i \to x_{0i}} \frac{f(x_{01}, \ldots, x_i, \ldots, x_{0k}) - f(x_{01}, \ldots, x_{0i}, \ldots, x_{0k})}{x_i - x_{0i}},$$

így az i-edik változó szerinti parciális deriváltat úgy számítjuk ki, hogy az *i-edik változó szerint deriválunk, miközben a többi változót konstansnak tekintjük.*

Irány menti derivált kiszámítása

Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az $x_0 \in D$ belső pontban (totálisan) differenciálható, akkor bármely $e \in \mathbb{R}^k$ egységvektor iránya mentén is differenciálható x_0-ban, és

$$D_e f(x_0) = \langle f'(x_0), e \rangle.$$

Ha $e = u_i$ az i-edik tengely irányába mutató egységvektor, akkor

$$\partial_i f(x_0) = D_{u_i} f(x_0) = \langle f'(x_0), u_i \rangle,$$

így $e = (e_1, e_2, \ldots, e_k) = e_1 u_1 + e_2 u_2 + \cdots + e_k u_k$ alapján

$$D_e f(x_0) = \partial_1 f(x_0) e_1 + \partial_2 f(x_0) e_2 + \cdots + \partial_k f(x_0) e_k.$$

Ezért *(totális) differenciálhatóság $\Longrightarrow$ parciális differenciálhatóság.*
Az is következik, hogy

$$f'(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \ldots, \partial_k f(x_0)),$$

így az $f'(x_0)$ *(totális) derivált (vektor) koordinátái a parciális deriváltak.*

(Totális) differenciálhatóság $\Longrightarrow$ folytonosság

Ha $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ az $x_0 \in D$ belső pontban (totálisan) differenciálható, akkor f folytonos x_0-ban.

parciális differenciálhatóság $\not\Longrightarrow$ folytonosság

parciális derivált folytonossága $\Longrightarrow$ (totális) differenciálhatóság

Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében folytonos parciális deriváltjai vannak (ekkor azt mondjuk, hogy a függvény folytonosan parciálisan differenciálható e környezetben), akkor f az x_0 pontban (totálisan) differenciálható (így folytonos is).

Láncszabály: összetett függvény differenciálhatósága

Ha mindegyik $j = 1, 2, \ldots, \ell$ *esetén a* $g_j : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *függvények differenciálhatók az* $x_0 \in D$ *belső pontban, és* $f : E \subset \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ *differenciálható az* $y_0 := g(x_0) \in E$ *belső pontban, ahol a* $g : D \to \mathbb{R}^\ell$ *függvény értelmezése* $x \in D$ *esetén* $g(x) := (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_\ell(x))$, *akkor létezik olyan* $\varepsilon > 0$, *hogy* $g(K(x_0, \varepsilon)) \subset E$, *így a*

$$h : K(x_0, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \qquad h(x) := f(g(x)) \text{ ha } x \in K(x_0, \varepsilon)$$

összetett függvény differenciálható az x_0 *pontban, és*

$$\partial_i h(x_0) = \sum_{j=1}^{\ell} \partial_j f(g(x_0))\, \partial_i g_j(x_0) \qquad \text{ha } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Magasabbrendű parciális deriváltak

Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében létezik az i-edik változó szerinti $\partial_i f$ parciális deriváltja. Ha ez parciálisan differenciálható a j-edik változó szerint, úgy a deriválást elvégezve kapjuk a

$$\partial_j \partial_i f(x_0) := \partial_j(\partial_i f(x_0))$$

második parciális deriváltját f-nek az x_0 pontban az i-edik és j-edik változók szerint (ebben a sorrendben!).
Hasonlóan, ha a $\partial_j \partial_i f(x)$ derivált létezik x_0 egy környezetében és ez parciálisan differenciálható az l-edik változó szerint, úgy a deriválást elvégezve kapjuk a

$$\partial_l \partial_j \partial_i f(x_0) := \partial_l(\partial_j \partial_i f(x_0))$$

harmadik parciális deriváltat. Hasonlóan értelmezhetjük a negyedrendű stb. parciális deriváltakat is. Egyéb jelölések a parciális deriváltakra: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$, ill. $f_{x_i,x_j}(x_0)$.

Példa. Számítsuk ki az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := x^2 + y^2 e^{xy}$$

függvény összes első- és másodrendű parciális deriváltját, és hasonlítsuk össze a $\partial_1\partial_2 f(x,y)$ és $\partial_2\partial_1 f(x,y)$ vegyes deriváltakat.

Young tétel: a vegyes parciális deriváltak függetlensége a deriválás sorrendjétől

Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $x_0 \in D$ *belső pont egy környezetében valamely* $m \geq 2$ *esetén az összes* m*-edik parciális deriváltja létezik és az* x_0 *pontban azok folytonosak, akkor az* f *függvény* m*-edik parciális deriváltjai az* x_0 *pontban a differenciálás sorrendjétől függetlenek.*

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ pontban

- **lokális/helyi maximuma (minimuma)** van, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogy
$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \quad \forall\, x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D \text{ esetén.}$$
- **szigorú lokális/helyi maximuma (minimuma)** van, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogy
$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \quad \forall\, x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D, \;\; x \neq x_0 \;\text{ esetén.}$$
- **globális/abszolút maximuma (minimuma)** van, ha
$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \quad \forall\, x \in D \text{ esetén.}$$
- **szigorú globális/abszolút maximuma (minimuma)** van, ha
$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \quad \forall\, x \in D, \;\; x \neq x_0 \;\text{ esetén.}$$

A szélsőérték létezésének elegendő feltétele

Korlátos, zárt halmazon folytonos függvény felveszi a függvényértékek infimumát és szuprémumát függvényértékként, ami azt jelenti, hogy a függvénynek van minimuma és maximuma (az illető korlátos, zárt halmazon).

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele

Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pontban lokális szélsőértéke van, és léteznek f első parciális deriváltjai x_0-ban, akkor

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = \cdots = \partial_k f(x_0) = 0.$$

(E feltételnek eleget tevő x_0 pontokat az f függvény **stacionárius pontjainak** nevezzük.)

A szélsőérték létezésének másodrendű elegendő feltétele

Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *összes második parciális deriváltja folytonos az* $x_0 \in D$ *belső pont egy környezetében, továbbá*

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = \cdots = \partial_k f(x_0) = 0.$$

1. *Ha a*
$$Q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \qquad Q(h) = Q(h_1, \ldots, h_k) := \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \partial_j \partial_i f(x_0) h_i h_j$$
kvadratikus függvény ***pozitív definit,*** *azaz* $Q(h) > 0$ *ha* $h \in \mathbb{R}^k$ *és* $h \neq 0$, *akkor* f*-nek* ***szigorú lokális minimuma*** *van* x_0*-ban.*
2. *Ha Q* ***negatív definit****, azaz* $Q(h) < 0$ *minden* $h \in \mathbb{R}^k$, $h \neq 0$ *esetén, akkor* f*-nek* ***szigorú lokális maximuma*** *van* x_0*-ban.*
3. *Ha* Q ***indefinit****, azaz* $Q(h)$ *felvesz pozitív és negatív értéket is, akkor* f*-nek* ***nincs szélsőértéke*** x_0*-ban.*

Másodrendű elegendő feltétel, determinánsokkal

Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *összes második parciális deriváltja folytonos az* $x_0 \in D$ *belső pont egy környezetében, továbbá*

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = \cdots = \partial_k f(x_0) = 0.$$

Legyen $A = \big(\partial_i \partial_j f(x_0)\big) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ *az* f *függvény* x_0 *pontbeli második parciális deriváltjaiból álló mátrix, és legyen* Δ_j $(j = 1, \ldots, k)$ *az* A *bal felső* j*-edrenű sarokdeterminánsa, azaz*

$$\Delta_1 := \partial_1 \partial_1 f(x_0),\ \Delta_2 := \begin{vmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x_0) & \partial_1 \partial_2 f(x_0) \\ \partial_2 \partial_1 f(x_0) & \partial_2 \partial_2 f(x_0) \end{vmatrix}, \ \ldots, \Delta_k := |A|.$$

1. Ha $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\ldots$, $\Delta_k > 0$, akkor f-nek **szigorú lokális minimuma** van x_0-ban,
2. ha $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\ldots$, $(-1)^k \Delta_k > 0$, akkor f-nek **szigorú lokális maximuma** van x_0-ban.

Kétváltozós függvény szélsőértéke

Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ összes második parciális deriváltja folytonos az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében, továbbá

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = 0.$$

1. *Ha* $\Delta_1 = \partial_1\partial_1 f(x_0) > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \partial_1\partial_1 f(x_0) & \partial_1\partial_2 f(x_0) \\ \partial_1\partial_2 f(x_0) & \partial_2\partial_2 f(x_0) \end{vmatrix} > 0,$
   akkor f-nek ***szigorú lokális minimuma*** *van x_0-ban,*
2. *ha* $\Delta_1 = \partial_1\partial_1 f(x_0) < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \partial_1\partial_1 f(x_0) & \partial_1\partial_2 f(x_0) \\ \partial_1\partial_2 f(x_0) & \partial_2\partial_2 f(x_0) \end{vmatrix} > 0,$
   akkor f-nek ***szigorú lokális maximuma*** *van x_0-ban,*
3. *ha* $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \partial_1\partial_1 f(x_0) & \partial_1\partial_2 f(x_0) \\ \partial_1\partial_2 f(x_0) & \partial_2\partial_2 f(x_0) \end{vmatrix} < 0,$
   akkor f-nek ***nincs szélsőértéke*** *x_0-ban.*

Példa.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy$$

lokális szélsőértékeinek meghatározása.

Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

Legyenek $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $g_i : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, l$, $l < k$ adott függvények. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in D$ pontban a $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$, $\dots, g_l(x) = 0$ feltételek mellett **lokális/helyi feltételes maximuma (minimuma)** van, ha $g_1(x_0) = \dots = g_l(x_0) = 0$, és van olyan $\varepsilon > 0$ hogy

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \text{ teljesül minden } x \in D \cap K(x_0, \varepsilon)$$

mellett, melyre $g_1(x) = \dots = g_l(x) = 0$. Ha $g_1(x_0) = \dots = g_l(x_0) = 0$, és $f(x_0) > f(x)$ $\quad (f(x_0) < f(x))$ teljesül minden $x_0 \neq x \in D \cap K(x_0, \varepsilon)$ mellett, melyre $g_1(x) = \dots = g_l(x) = 0$, akkor **szigorú lokális feltételes maximum (minimum)**-ról beszélünk.

A feltételes szélsőérték szükséges feltétele

- Tegyük fel, hogy az $f, g_i : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, l$, $l < k$), az f függvénynek az első parciális deriváltjai folytonosak az $x_0 \in D$ belső egy környezetében
- f-nek az $x_0 \in D$ pontban a $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$, $\dots, g_l(x) = 0$ feltételek mellett lokális feltételes szélsőértéke van,
- a $\begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x_0) & \cdots & \partial_k g_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_l(x_0) & \cdots & \partial_k g_l(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times k}$ mátrix rangja l.

Akkor van olyan $\lambda_0 = (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0l}) \in \mathbb{R}^l$ pont, hogy az

$$L(\lambda, x) := f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \cdots + \lambda_l g_l(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R}^l, x \in D)$$

függvényre $\quad \partial_1 L(\lambda_0, x_0) = \cdots = \partial_{l+k} L(\lambda_0, x_0) = 0.$

A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ számokat Lagrange-féle multiplikátoroknak nevezzük, az L függvényt pedig a feltételes szélsőérték probléma **Lagrange-féle függvényének** nevezzük.

A feltételes szélsőérték probléma megoldása úgy történik, hogy a

$$\partial_1 L(\lambda, x) = \cdots = \partial_{l+k} L(\lambda, x) = 0$$

$l + k$ egyenletből álló rendszert (**melynek első l db. egyenlete éppen** $g_1(x) = \cdots = g_l(x) = 0$) megoldjuk a $\lambda_1, \ldots, \lambda_l, x_1, \ldots, x_k$, ismeretlenekre, a $(\lambda_0, x_0) = (\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0l}, x_{01}, \ldots, x_{0k}) \in \mathbb{R}^l \times D$ megoldások a Lagrange függvény stacionárius pontjai. Ennek az $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0k})$ koordinátái adják a **feltételes szélsőérték lehetséges helyeit.**

A feltételes szélsőérték elegendő feltétele

- Tegyük fel, hogy az $f, g_i : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, l,\ l < k)$, második parciális deriváltjai folytonosak az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében,
- $(\lambda_0, x_0) \in R^l \times D$ a Lagrange függvény stacionárius pontja, azaz a
$$\partial_1 L(\lambda_0, x_0) = \cdots = \partial_{l+k} L(\lambda_0, x_0) = 0$$
rendszer megoldása,
- és $\begin{vmatrix} \partial_{k-l+1} g_1(x_0) & \cdots & \partial_k g_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{k-l+1} g_l(x_0) & \cdots & \partial_k g_l(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$

Ha $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j \, \partial_i \partial_j f(x_0) > 0 \ (< 0)$ minden olyan $h = (h_1, \ldots, h_k) \in \mathbb{R}^k$, $h \neq 0$ esetén, melyre $\sum_{j=1}^k h_j \, \partial_j g_i(x_0) = 0$ minden $i = 1, \ldots, l$ mellett, akkor f-nek **szigorú lokális feltételes minimuma (maximuma)** van x_0-ban.

A feltételes szélsőérték elégséges feltétele determinánsokkal

Legyen $\Delta_j,\ (j = 2l+1, \ldots, l+k)$ *a*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \partial_1 g_1(x_0) & \cdots & \partial_k g_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \partial_1 g_l(x_0) & \cdots & \partial_k g_l(x_0) \\ \partial_1 g_1(x_0) & \cdots & \partial_1 g_l(x_0) & \partial_{l+1}\partial_{l+1} L(\lambda_0, x_0) & \cdots & \partial_{l+1}\partial_{l+k} L(\lambda_0, x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_k g_1(x_0) & \cdots & \partial_k g_l(x_0) & \partial_{l+k}\partial_{l+1} L(\lambda_0, x_0) & \cdots & \partial_{l+k}\partial_{l+k} L(\lambda_0, x_0) \end{pmatrix}$$

*szimmetrikus **blokkmátrix** bal felső* $j \times j$*-s sarokmátrixának determinánsa.*

1. *Ha* $(-1)^l \Delta_j > 0$ *minden* $j = 2l+1, \ldots, l+k$ *esetén, akkor* f*-nek **szigorú lokális feltételes minimuma** van* x_0*-ban.*
2. *Ha* $(-1)^{l+j} \Delta_j > 0$ *minden* $j = 2l+1, \ldots, l+k$ *esetén, akkor* f*-nek **szigorú lokális feltételes maximuma** van* x_0*-ban.*

A blokkmátrix másik alakja

Vegyük észre, hogy blokkmátrixunk éppen az $L(\lambda, x)$ Lagrange függvény összes második parciális deriváltjaiból álló mátrix a (λ_0, x_0) stacionárius pontban véve, azaz a $(\partial_i \partial_j L(\lambda_0, x_0)) \in \mathbb{R}^{(l+k)\times(l+k)}$ mátrix.

Példa. Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := x + 2y$$

feltételes szélsőértékeit a

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad \text{körvonal}$$

feltétel mellett.

Megoldás. A probléma Lagrange függvénye

$$L(\lambda, x, y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \quad ((\lambda, x, y) \in \mathbb{R}^3).$$

A lehetséges szélsőértékhelyeket a

$$\begin{aligned} \partial_\lambda L(\lambda, x, y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad \partial_x L(\lambda, x, y) = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \partial_y L(\lambda, x, y) &= 2 + 2\lambda y = 0 \end{aligned}$$

megoldásai adják. Könnyű kiszámolni, hogy a megoldások:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad y_1 = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \qquad y_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

a feltételes szélsőérték lehetséges helyei.

Azt, hogy feltételes maximum vagy minimum van-e ezen pontokban a fenti tétel alapján döntjük el. Az L második parciális deriváltjaiból felépített a blokkmátix (a (λ, x, y) pontban)

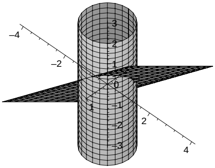
$$\begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Most $k = 2, l = 1$, mivel $2l + 1 = 3 = k + l$ így csak az blokkmátrix determinánsának előjelét kell meghatározni. Egyszerű számítás mutatja, hogy ez

$$\Delta_3(\lambda_1, x_1, y_1) = \frac{1}{\sqrt{5^3}} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{-100}{\sqrt{5^3}} < 0$$

és hasonlóan $\Delta_3(\lambda_2, x_2, y_2) = \frac{100}{\sqrt{5^3}}$ vagyis a $(-1)^l \Delta_{k+l} = (-1)\Delta_3(\lambda_1, x_1, y_1) > 0$ feltétel teljesül, (x_1, y_1)-ben szigorú feltételes lokális minimum van, míg a $(-1)^{l+(l+k)}\Delta_3(\lambda_2, x_2, y_2) = (-1)^4\Delta_3(\lambda_2, x_2, y_2) > 0$ ezért (x_2, y_2)-ben szigorú feltételes lokális maximum van.

Megjegyzés. Érdemes a feladatot geometriailag is szemléltetni: az $f(x, y) = x + 2y$ sík és az $x^2 + y^2 = 1$ által meghatározott hengerfelület metszésvonala (mely egy az $\mathbb{R}^3$ térbeli ellipszis) melyik pontja van ”legmagasabban” és ”legalacsonyabban” (a magasságot a z tengely irányában mérve).



Véletlen események

Valószínűsége **véletlen eseményeknek** van,

- melyekről nem tudjuk előre megmondani, hogy bekövetkeznek-e, vagy sem;
- és amelyek
  - vagy **véletlen jelenségek** megfigyelésével kapcsolatosak (amikor a körülményeket nem tudjuk befolyásolni),
  - vagy pedig **véletlen kimenetelű kísérletekkel** kapcsolatosak (amikor befolyásolni tudjuk a körülményeket).

Példák:

- Minőségellenőrzés: n termékből kiválasztunk m darabot ($m \leq n$), és megszámoljuk, hogy hány selejtes van; **lehetséges kimenetelek:** az $\Omega := \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ halmaz elemei;
- Hagyományos lottó: megjelölünk 5 számot 90-ből, és megszámoljuk, hogy hány találatunk van; **lehetséges kimenetelek:** az $\Omega := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz elemei;
- Ragályos fertőzés terjedése, csapadékmennyiség alakulása, szeizmográf mozgása, sorhosszúság alakulása pénztáraknál, szerencsejátékok, tőzsdei áringadozások.

- **Elemi események:** a kísérlet/megfigyelés lehetséges kimenetelei.
- **Eseménytér:** az elemi események halmaza; jelölés: Ω.
- **Esemény:** az eseménytér bizonyos $A \subset \Omega$ részhalmaza, amit úgy értünk, hogy ha az $\omega \in \Omega$ elemi esemény következik be, akkor
  - $\omega \in A$ esetén bekövetkezik az A esemény is,
  - $\omega \notin A$ esetén az A esemény nem következik be.
- **Biztos esemény:** amely mindig bekövetkezik; be lehet azonosítani az $\Omega \subset \Omega$ részhalmazzal.
- **Lehetetlen esemény:** amely sohasem következik be; be lehet azonosítani az $\emptyset \subset \Omega$ üres részhalmazzal.

Logikai műveletek eseményekkel

- Minden A eseménnyel kapcsolatban tekinthetjük az A **ellentett (komplementer) eseményét:** ez pontosan akkor következik be, amikor az A esemény nem következik be; jelölése: $\overline{A}$.
- Az A és B események **összege (uniója)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik; jelölése: $A+B$ vagy $A \cup B$.
- Az A és B események **szorzata (metszete)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események mindegyike bekövetkezik; jelölése: $A \cdot B$ vagy $A \cap B$.
- Az A és B események **különbsége** az az esemény, mely pontosan akkor következik be, amikor az A esemény bekövetkezik, a B esemény pedig nem; jelölése: $A - B$ vagy $A \setminus B$.

A logikai műveletek tulajdonságai

- kommutativitás: $$A + B = B + A,$$ $$A \cdot B = B \cdot A.$$
- asszociativitás: $$A + (B + C) = (A + B) + C,$$ $$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$
- idempotencia: $$A + A = A,$$ $$A \cdot A = A.$$
- disztributivitás: $$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C),$$ $$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C).$$
- de Morgan-féle azonosságok: $$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B},$$ $$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$$
- különbség: $$A - B = A \cdot \overline{B}.$$

Diszjunkt események

Azt mondjuk, hogy az A és B események **diszjunktak (kizárják egymást)**, ha egyszerre nem következhetnek be.

Az A és B események akkor és csak akkor diszjunktak, ha $A \cdot B = \emptyset$.

$\Rightarrow$

Azt mondjuk, hogy az A esemény **maga után vonja** a B eseményt, ha az A esemény bekövetkezése esetén mindig bekövetkezik a B esemény is; jelölése: $A \Rightarrow B$.

A következő állítások ekvivalensek:

- $A \Rightarrow B$;
- $A \subset B$;
- $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Eseményalgebra

Egy Ω eseménytér bizonyos eseményeiből álló $\mathcal{A}$ rendszert **eseményalgebrának** nevezünk, ha tartalmazza a biztos eseményt, és zárt a komplementerképzésre és a véges unióképzésre.

Például Ω összes részhalmazainak $\mathcal{A} := 2^{\Omega}$ rendszere

σ-algebra

Egy eseményalgebrát **σ-algebrának** nevezünk, ha zárt a megszámlálható unióképzésre.

Példák:

1. Egy pénzdarab feldobása esetén
$$\Omega = \{\text{fej}, \text{írás}\}.$$
De lehet a fejhez a 0, az íráshoz pedig az 1 számot hozzárendelni, és így
$$\Omega = \{0, 1\}.$$
Nyilván
$$\mathcal{A} = 2^{\Omega} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}.$$
Ekkor az elemi események száma: $|\Omega| = 2$, az összes események száma pedig $|2^{\Omega}| = 4$.

2. *n*-szer **egymás után dobva** egy pénzdarabbal:

$$\Omega = \{\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1\}\}.$$

Ekkor $|\Omega| = 2^n$, $|2^\Omega| = 2^{2^n}$.

Ha n darab egyforma pénzdarabot **egyidőben dobunk fel**, akkor is lehet ugyanezt az eseményteret tekinteni, hiszen a kísérlet kimenetelét nem változtatja meg, ha megszámozzuk a pénzdarabokat. De lehet csak a megkülönböztethető kimenetelekre szorítkozni: ezek száma $n+1$. Az első eseménytér általában alkalmasabb, mert például szabályos pénzdarab esetén az elemi események egyforma esélyűek!

3. Egy zsákban n különböző színű golyó van. Kihúzunk ezek közül k darabot; négy lehetőség van aszerint, hogy **visszatevéssel** vagy **visszatevés nélkül** húzunk (az utóbbi esetben $k \leq n$ szükséges), és aszerint, hogy a **sorrend számít** vagy a **sorrend nem számít**.

   Ez a kísérlet ekvivalens azzal a kísérlettel, amikor n rekeszbe helyezünk el k tárgyat; az előbbi négy lehetőség annak felel meg, hogy egy rekeszbe több tárgy is kerülhet vagy csak egy, illetve a tárgyak meg vannak különböztetve, vagy nem.

	sorrend számít (variáció)	sorrend nem számít (kombináció)	
visszatevés nélkül (ismétlés nélkül)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$	egy rekeszbe legfeljebb egy tárgy kerülhet
visszatevéssel (ismétléses)	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$	egy rekeszbe több tárgy is kerülhet
	a tárgyak különbözőek	a tárgyak nem különböznek	

- Ha n különböző elem közül húzunk visszatevés nélkül úgy, hogy a sorrend számít, és kihúzzuk az összes n elemet (ami azzal ekvivalens, hogy n elemet sorbaállítunk; ezeket **permutációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n,$$

hiszen az első húzásnál még n lehetőség van, a másodiknál $n-1$, stb., és ezek szorzata adja az eredményt.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül (ahol $k \leq n$) úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétlés nélküli variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

amit az előzőhöz hasonló gondolatmenettel bizonyíthatunk.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétléses variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma
$$n^k,$$
hiszen minden húzásnál n lehetőség van.
- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül (ahol $k \leq n$) úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétlés nélküli kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma
$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$
hiszen a megfelelő ismétlés nélküli variációkat úgy lehet megkapni, hogy a kihúzott k elemet az összes lehetséges módon sorbarakjuk; ezek száma pedig mindig $k!$.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétléses kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetoségek száma
$$\binom{n+k-1}{k}.$$
Ezt úgy lehet belátni, hogy a kísérlet kimeneteleihez egyértelműen hozzá lehet rendelni egy olyan sorozatot, mely $n-1$ darab egyesből és k darab nullából áll, mégpedig úgy, hogy az első egyes elé írt nullák száma (ami 0 is lehet) jelenti az első fajta elemből húzottak számát, az első és második egyes közé írt nullák száma jelenti a második fajta elemből húzottak számát, stb., az $(n-1)$-edik egyes után írt nullák száma jelenti az n-edik fajta elemből húzottak számát; az ilyen nulla–egy sorozatok száma pedig nyilván $\binom{n+k-1}{k}$, hiszen azt kell megmondani, hogy az $n+k-1$ hely közül melyik k helyre kerüljön nulla.

4. Adva van n kártya; ezeket osztjuk szét k játékos között úgy, hogy sorban $n_1, n_2, \ldots, n_k$ kártyát kapjanak, ahol $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, és az egy játékoshoz kerülő lapok sorrendje nem számít (ezeket **ismétléses permutációknak** nevezzük). Ekkor az eseménytér elemeinek száma
$$|\Omega| = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!},$$
hiszen a kártyák $n!$ számú permutációit úgy lehet ezekből a leosztásokból megkapni, hogy az egy játékoshoz került n_1, n_2, $\ldots$, n_k kártyát tetszőleges sorrendbe helyezzük.

5. Addig dobálunk egy érmével, míg az első fejet sikerül elérni. Ekkor
$$\Omega = \{\mathrm{f}, \mathrm{if}, \mathrm{iif}, \mathrm{iiif}, \ldots, \mathrm{i}_\infty\},$$
ahol i_∞ azt a lehetséges kimenetelt jelöli, amikor csak írást dobunk a végtelenségig.

Gyakoriság, relatív gyakoriság

Ha egy A eseménnyel kapcsolatban n darab véletlen, független kísérletetet hajtunk végre, akkor A **gyakorisága** az a szám, ahányszor A bekövetkezik; ez egy **véletlen mennyiség**, melynek lehetséges értékei: $0, 1, \dots, n$; jelölése: $k_n(A)$.

Az A esemény **relatív gyakorisága:** $r_n(A) := \dfrac{k_n(A)}{n}$.

Tapasztalat:
ha n-et növeljük, azaz egyre több kísérletet hajtunk végre, akkor az A esemény relatív gyakorisága egyre kisebb kilengésekkel ingadozik egy $\mathrm{P}(A)$ szám körül; ezt nevezzük A **valószínűségének.**

Relatív gyakoriság tulajdonságai

- $0 \leq r_n(A) \leq 1$ tetszőleges A esemény esetén.
- $r_n(\emptyset) = 0$, $r_n(\Omega) = 1$.
- ha A és B egymást kizáró események, akkor
$$r_n(A \cup B) = r_n(A) + r_n(B).$$
- ha $A_1, A_2, \ldots$ páronként egymást kizáró események, akkor
$$r_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} r_n(A_j).$$
- $r_n(\overline{A}) = 1 - r_n(A)$ tetszőleges A esemény esetén.
- ha $A \subset B$ események, akkor $r_n(A) \leq r_n(B)$.

Valószínűségi mező

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ hármas, ahol

- Ω egy nemüres halmaz (az eseménytér);
- $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ az Ω bizonyos részhalmazaiból álló σ-algebra (az események rendszere);
- $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ olyan leképezés, melyre
  1. $\mathrm{P}(A) \in [0, 1]$ tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén,
  2. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$,
  3. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor
     $$\mathrm{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_j).$$
     (Ezt a tulajdonságot σ**-additivitásnak** nevezzük).

Egy A esemény esetén a $\mathrm{P}(A)$ számot az A **valószínűségének**, a $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ leképezést pedig **valószínűségeloszlásnak** nevezzük.

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$. (Hiszen ha $\mathrm{P}(\emptyset) > 0$ volna, akkor a σ-additivitásban $A_1 = A_2 = \ldots = \emptyset$ választással ellentmondásra jutnánk.)
- Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor
$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(A_j).$$
(Használjuk a σ-additivitást $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ esetére, és alkalmazzuk azt, hogy $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.)
Ezt a tulajdonságot **véges additivitásnak** nevezzük.
- $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.
(Hiszen $\Omega = A \cup \overline{A}$ diszjunkt felbontás, így a véges additivitással $1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(A \cup \overline{A}) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A})$.)

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- Ha $A \Rightarrow B$, azaz $A \subset B$, akkor
$$\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B), \qquad \mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A).$$
(Hiszen $A \subset B$ esetén $B = A \cup (B \setminus A)$ diszjunkt felbontás, ezért $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus A) \geq \mathrm{P}(A)$.)
Ezt a tulajdonságot **monotonitásnak** nevezzük.
- Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ esetén
$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B),$$
hiszen
$$A \cup B = \big[A \setminus (A \cap B)\big] \cup \big[B \setminus (A \cap B)\big] \cup (A \cap B)$$
diszjunkt felbontás, ezért $A \cap B \subset A$ és $A \cap B \subset B$ miatt
$$\mathrm{P}(A \cup B) = \big[\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)\big] + \big[\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)\big] + \mathrm{P}(A \cap B).$$

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- Tetszőleges $A, B, C \in \mathcal{A}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) \\ - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) \\ + \mathrm{P}(A \cap B \cap C),\end{aligned}$$

hiszen

$$\mathrm{P}\big((A \cup B) \cup C\big) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}\big((A \cup B) \cap C\big)$$

és

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big((A \cup B) \cap C\big) &= \mathrm{P}\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) \\ &= \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}\big((A \cap C) \cap (B \cap C)\big),\end{aligned}$$

ahol $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

Diszkrét valószínűségi mező

Ω véges vagy megszámlálhatóan végtelen, azaz

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$$

vagy

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$$

alakú, és $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$.

Valószínűségek kiszámolása diszkrét valószínűségi mezőben

Tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény előáll az

$$A = \bigcup_{i\,:\,\omega_i \in A} \{\omega_i\}$$

diszjunkt felbontás alakjában, így

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} \mathrm{P}(\{\omega_i\}).$$

Ezért diszkrét valószínűségi mezőben elég megadni az elemi események valószínűségeit, a

$$p_i := \mathrm{P}(\{\omega_i\}), \qquad i = 1, 2, \dots$$

számokat ahhoz, hogy tetszőleges esemény valószínűségét ki tudjuk számolni.

Nyilván szükséges az, hogy ezek a $\{p_1, p_2, \dots\}$ számok nemnegatívak legyenek és összegük 1 legyen, hiszen

$$\sum_i p_i = \sum_i \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \mathrm{P}\left(\bigcup_i \{\omega_i\}\right) = \mathrm{P}(\Omega) = 1.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a $\{p_1, p_2, \dots\}$ számok **eloszlást** alkotnak.

Egyenletes eloszlás véges halmazon

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\},$$

és az elemi események egyenlő esélyűek, azaz

$$\mathrm{P}(\{\omega_1\}) = \mathrm{P}(\{\omega_2\}) = \ldots = \mathrm{P}(\{\omega_N\}) = \frac{1}{N}$$

Valószínűségek véges halmazon egyenletes eloszlás esetén

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} 1 = \frac{|A|}{N},$$

vagyis

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetelek száma}}.$$

Ez a **valószínűség kiszámításának klasszikus képlete.**

Példák:

1. *Két érmét feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy egy fej és egy írás legyen az eredmény?*

   Ekkor a két érmét megkülönböztetve az

   $$\Omega = \{\mathrm{ff}, \mathrm{fi}, \mathrm{if}, \mathrm{ii}\}$$

   eseményteret kapjuk, amelyben a kimenetelek egyforma valószínűségűek, így az

   $$A = \{\mathrm{fi}, \mathrm{if}\}$$

   esemény valószínűsége

   $$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Példák:

2. *Mennyi a valószínűsége, hogy egy n tagú társaságban van legalább két olyan személy, akiknek ugyanakkor van a születésnapja? (Feltesszük, hogy a szökőnap nem lehet.)*

   Nyilván $n > 365$ esetén (a ,,skatulya-elv" miatt) ez a biztos esemény, így ekkor a valószínűség 1.

   Ha pedig $n \leq 365$, akkor az ellentett eseménnyel számolva

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n} \\
&= 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n} \approx \begin{cases} 0.284 & \text{ha } n = 16 \\ 0.476 & \text{ha } n = 22 \\ 0.507 & \text{ha } n = 23 \\ 0.891 & \text{ha } n = 40 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Egyenletes eloszlás $\mathbb{R}^k$ véges mértékű részhalmazain

$\Omega \subset \mathbb{R}^k$ véges mértékű, és ,,minden pont egyenlő esélyű", azaz egy $A \subset \Omega$ részhalmaz valószínűsége A mértékével arányos, vagyis

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

ahol μ az illető halmaz mértékét jelöli:

- $k = 1$ esetén összhossz,
- $k = 2$ esetén terület,
- $k = 3$ esetén térfogat.

Ez a **valószínűségek geometriai kiszámítási módja.**

Példa: *Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két, találomra kiválasztott ponttal három szakaszra bontunk fel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három szakaszból háromszöget lehet szerkeszteni?*

Az eredmény a $[0,1] \times [0,1]$ négyzet azon részhalmazának területe, melynek pontjaira fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{cases} 0 < x < y < 1, \\ 1 - y < y, \\ x < 1 - x, \\ y - x < 1 - y + x, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 0 < y < x < 1, \\ 1 - x < x, \\ y < 1 - y, \\ x - y < 1 - x + y, \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} < y < 1, \\ y - x < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 0 < y < \frac{1}{2} < x < 1, \\ x - y < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ezért a keresett valószínűség $1/4$.

Feltételes relatív gyakoriság

Ha n független kísérletet végzünk, akkor az A esemény **feltételes relatív gyakorisága azon feltétel mellett, hogy a B esemény bekövetkezett**

$$r_n(A \mid B) := \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)} = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(B)}.$$

Feltételes valószínűség

Az A esemény **feltételes valószínűsége** a B feltétel mellett (azaz ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett)

$$\mathrm{P}(A \mid B) := \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)},$$

hacsak $\mathrm{P}(B) > 0$.

Példák:

1. *Mennyi a valószínűsége, hogy egy kétgyermekes családban mindkét gyerek fiú, ha feltételezzük, hogy egy gyerek egyenlő valószínűséggel lehet fiú vagy lány, és tudjuk, hogy*
   - *az idősebb gyerek fiú;*
   - *legalább az egyik gyerek fiú ?*

   Ekkor az eseménytér
   $$\Omega = \{\mathrm{FF}, \mathrm{FL}, \mathrm{LF}, \mathrm{LL}\},$$
   melynek elemei egyformán $1/4$ valószínűségűek. Legyen
   $$\begin{aligned} A &:= \{\text{mindkét gyerek fiú}\} = \{\mathrm{FF}\}, \\ B_1 &:= \{\text{az idősebb gyerek fiú}\} = \{\mathrm{FF}, \mathrm{FL}\}, \\ B_2 &:= \{\text{legalább az egyik gyerek fiú}\} = \{\mathrm{FF}, \mathrm{FL}, \mathrm{LF}\}. \end{aligned}$$
   Nyilván $A \cap B_1 = A \cap B_2 = \{\mathrm{FF}\}$, így
   $$\mathrm{P}(A \mid B_1) = 1/2, \qquad \mathrm{P}(A \mid B_2) = 1/3.$$

2. *Bridzsnél osztáskor 2 ászt kapott valaki. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik 2 ász a partnerénél van?*

Az összes leosztások száma $\dfrac{52!}{(13!)^4}$,

ezek egyforma valószínűségűek. Ezekből $\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{11}\cdot\dfrac{39!}{(13!)^3}$ olyan leosztás van, melynél az első játékos 2 ászt kap, és ezek között pedig

$$\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{11}\cdot\binom{37}{11}\cdot\frac{26!}{(13!)^2}$$

olyan leosztás van, melynél a másik 2 ász a partnerénél van. Tehát a keresett feltételes valószínűség

$$\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{11}\cdot\binom{37}{11}\cdot\frac{26!}{(13!)^2}}{\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{11}\cdot\frac{39!}{(13!)^3}}=\frac{2}{19}.$$

Láncszabály

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$
$$= \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathrm{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}),$$

hacsak $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$.

A jobb oldal

$$\mathrm{P}(A_1)\,\frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathrm{P}(A_1)}\,\frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1})}$$

Példa: *Húzzunk ki a 32 lapos magyar kártyából hármat visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első és a harmadik kihúzott lap piros, a második pedig nem az?*

Jelölje $i = 1, 2, 3$ esetén A_i azt az eseményt, hogy az i-edik húzás eredménye piros. Ekkor

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(\overline{A}_2 \mid A_1) = \frac{24}{31}, \qquad \mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap \overline{A}_2) = \frac{7}{30},$$

így

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{31} \cdot \frac{7}{30} = \frac{7}{155}.$$

Persze lehetne használni azt az eseményteret is, amely az első három kihúzott lapból áll a sorrendet is figyelembe véve; ekkor $|\Omega| = 32{\cdot}31{\cdot}30$, és a kimenetelek egyenlő valószínűségűek. Mivel a kedvező esetek száma $8 \cdot 24 \cdot 7$, így a keresett valószínűség $\frac{8\cdot24\cdot7}{32\cdot31\cdot30} = \frac{7}{155}$.

Teljes eseményrendszer

Az eseménytér megszámlálható diszjunkt felbontása, azaz események $A_1, A_2, \ldots$ véges vagy végtelen sorozata, melyek egymást páronként kizárják, és uniójuk az egész eseménytér, vagyis

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{ha} \quad i \neq j, \qquad \text{és} \qquad \bigcup_i A_i = \Omega.$$

Egy teljes eseményrendszer eseményei közül mindig pontosan egy következik be, és

$$\sum_i \mathrm{P}(A_i) = 1.$$

Teljes valószínűség tétele

Ha az $A_1, A_2, \ldots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor tetszőleges B eseményre

$$\mathrm{P}(B) = \sum_i \mathrm{P}(B \mid A_i) \cdot \mathrm{P}(A_i).$$

Bizonyítás. Nyilván $B = \bigcup_i (B \cap A_i)$ diszjunkt felbontás, hiszen

$$B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_k A_k) = \bigcup_k (B \cap A_k),$$

és $i \neq j$ esetén

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap A_i \cap A_j = \emptyset,$$

ugyanis $A_i \cap A_j = \emptyset$. Ezért

$$\mathrm{P}(B) = \sum_i \mathrm{P}(B \cap A_i) = \sum_i \mathrm{P}(B \mid A_i) \cdot \mathrm{P}(A_i).$$

Példa: *Három gép csavarokat gyárt. A selejt aránya az első gépnél* 1 %, *a másodiknál* 2 %, *a harmadiknál* 3 %. *Az össztermék* 50 %*-át az első gép,* 30 %*-át a második,* 20 %*-át pedig a harmadik állítja elő. Mi a valószínűsége annak, hogy az össztermékből véletlenszerűen választott csavar selejtes?*

Jelölje B azt az eseményt, hogy selejtet húzunk, $i = 1, 2, 3$ esetén pedig A_i azt, hogy a kihúzott csavar az i-edik gépen készült. Ekkor

$$\mathrm{P}(B|A_1) = 0.01, \qquad \mathrm{P}(B|A_2) = 0.02, \qquad \mathrm{P}(B|A_3) = 0.03,$$
$$\mathrm{P}(A_1) = 0.5, \qquad \mathrm{P}(A_2) = 0.3, \qquad \mathrm{P}(A_3) = 0.2,$$

így

$$\mathrm{P}(B) = 0.01 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.2 = 0.017.$$

Bayes-formula

Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Bizonyítás: $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ és $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)$.

Bayes-tétel

Ha az $A_1, A_2, \ldots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak és $\mathrm{P}(B) > 0$, akkor

$$\mathrm{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(B \mid A_i)}{\sum\limits_j \mathrm{P}(B \mid A_j) \cdot \mathrm{P}(A_j)}.$$

Bizonyítás: A Bayes-formulával $\mathrm{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(B|A_i)}{\mathrm{P}(B)}$. A teljes valószínűség tételével $\mathrm{P}(B) = \sum\limits_j \mathrm{P}(B \mid A_j) \cdot \mathrm{P}(A_j)$.

Példa: *Mennyi a feltételes valószínűsége az előző példában annak, hogy az első, második, illetve harmadik gépen gyártották a kiválasztott csavart azon feltétel mellett, hogy az selejtesnek bizonyult?*

$$\mathrm{P}(A_1 \mid B) = \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.017} = \frac{5}{17}, \qquad \mathrm{P}(A_2 \mid B) = \frac{6}{17}, \qquad \mathrm{P}(A_3 \mid B) = \frac{6}{17}.$$

Független események

Azt mondjuk, hogy az A és B események **függetlenek**, ha

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor a következő állítások ekvivalensek:

- A és B függetlenek;
- $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$;
- $\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B)$.

Ha $\mathrm{P}(A) = 0$ vagy $\mathrm{P}(A) = 1$, akkor A tetszőleges B eseménytől független.

Páronként független események

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots$ események **páronként függetlenek**, ha közülük bármely két esemény független.

(Teljesen) független események

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots$ események **(teljesen) függetlenek**, ha tetszőleges $i_1, i_2, \ldots, i_k$ **különböző** indexekre

$$\mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathrm{P}(A_{i_1})\mathrm{P}(A_{i_2}) \cdots \mathrm{P}(A_{i_k}).$$

Lehetséges, hogy például három esemény páronként függetlenek, de nem (teljesen) függetlenek.

Valószínűségi változó / véletlen mennyiség, eloszlásfüggvény

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, akkor a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ leképezés **valószínűségi változó** / **véletlen mennyiség**, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$. Ekkor az $F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$F_\xi(x) := \mathrm{P}\{\xi < x\}$$

függvényt ξ **(kumulatív) eloszlásfüggvényének** nevezzük.

Eloszlásfüggvény

Egy $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ függvény akkor és csak akkor lehet eloszlásfüggvénye valamely $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változónak, ha

1. F monoton növekvő,
2. F balról folytonos,
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Diszkrét valószínűségi változó

A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$ értékkészlet megszámlálható.

A ξ diszkrét valószínűségi változó **eloszlása** az a P_ξ valószínűségi mérték a ξ lehetséges értékeinek $X := \{x_1, x_2, \dots\}$ halmazán, melyre $\mathrm{P}_\xi(\{x_i\}) = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\})$, $x_i \in X$.

Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

Egy ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye olyan lépcsős függvény, mely a lehetséges értékeknél ugrik, és az ugrás nagysága az illető érték valószínűsége. Ha a ξ lehetséges értékeinek halmaza $X := \{x_1, x_2, \dots\}$, akkor

$$F_\xi(x) = \sum_{\{i : x_i < x\}} \mathrm{P}_\xi(\{x_i\}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Példák:

1. *Két kockát dobva a dobott számok összegét jelölje ξ. Határozzuk meg ξ eloszlását!*

   Ekkor ξ diszkrét valószínűségi változó; lehetséges értékeinek halmaza:
   $$X = \{2, 3, \ldots, 12\},$$
   eloszlása:
   $$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \begin{cases} \dfrac{k-1}{36} & \text{ha } 2 \leq k \leq 7, \\[2ex] \dfrac{13-k}{36} & \text{ha } 7 \leq k \leq 12. \end{cases}$$

2. **Binomiális eloszlás.**

n független kísérlet
A esemény, $p := \mathrm{P}(A)$
A gyakorisága: $\xi := k_n(A)$
diszkrét valószínűségi változó;
lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{0, 1, 2, \ldots, n\},$$

eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

melyet (n, p) **paraméterű binomiális eloszlásnak** nevezünk.

3. **Elsőrendű negatív binomiális eloszlás.**

A esemény, $p := \mathrm{P}(A)$
Addig végzünk független kísérleteket, míg A először bekövetkezik.
$\xi :=$ az ehhez szükséges kísérletek száma;
lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{1, 2, \ldots, \infty\},$$

eloszlása: $k = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = p \cdot (1-p)^{k-1},$$

így

$$\mathrm{P}\{\xi = \infty\} = 1 - \mathrm{P}\{\xi < \infty\} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\{\xi = k\} = 1 - p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = 0.$$

Ekkor ξ eloszlását **elsőrendű** p **paraméterű negatív binomiális eloszlásnak** (vagy geometriai eloszlásnak) nevezzük.

4. **Hipergeometrikus eloszlás.**

Egy dobozban M piros és $N-M$ fekete golyó van $(M<N)$.
Visszatevés nélkül húzunk ki n golyót $(n \leq N)$.
$\xi :=$ a kihúzott piros golyók száma;
lehetséges értékeinek halmaza: olyan k értékek, melyekre teljesül $0 \leq k \leq n$, $k \leq M$, és $n-k \leq N-M$,
eloszlása:

$$P\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor ξ eloszlását $(n, M, N-M)$ **paraméterű hipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.

5. **Poisson eloszlás.**

Mazsolás kalácsot sütünk; 1000 gramm tésztába $n = 50$ darab mazsolát teszünk. Egy szelet súlya 25 gramm, tehát $N = 40$ szelet készül. Minden mazsola egyforma valószínűséggel kerülhet bele bármely szeletbe, és a mazsolák egymástól függetlenül „mozognak". Jelölje ξ egy kiválasztott szeletbe kerülő mazsolák számát. Lehetséges értékeinek halmaza $X = \{0, 1, \ldots, 50\}$, eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \binom{50}{k} \left(\frac{1}{40}\right)^k \left(1 - \frac{1}{40}\right)^{50-k},$$

tehát ξ eloszlása n-edrendű $1/N$ paraméteru binomiális eloszlás.
Mi történik, ha növeljük a tészta mennyiségét?

Ha n mazsolát használunk fel $20 \cdot n$ gramm tésztába, akkor $N = 20 \cdot n/25$ szelet készül, így a binomiális eloszlás paramétere $p_n := 1/N = \lambda/n$, ahol $\lambda := 5/4$ az egy szeletre átlagosan jutó mazsolák száma. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Ha egy η valószínűségi változó lehetséges értékei a nemnegatív egész számok és $k = 0, 1, \ldots$ esetén

$$\mathrm{P}(\eta = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},$$

ahol $\lambda > 0$, akkor azt mondjuk, hogy η eloszlása λ **paraméterű Poisson–eloszlás.**

Valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó és létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R},$$

akkor az f_ξ függvényt a ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük. (Nem egyértelműen definiált!)

Valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

Ha $a < b$, akkor

$$\mathrm{P}\{a \leq \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ha az f_ξ sűrűségfüggvény folytonos az $x \in \mathbb{R}$ pontban, akkor

$$F'_\xi(x) = f_\xi(x).$$

Egy $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ függvény akkor és csak akkor lehet sűrűségfüggvénye valamely $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változónak, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Egyenletes eloszlás az $[a, b]$ intervallumon

Ha az $[a, b]$ intervallumon választunk véletlenszerűen egy ξ pontot úgy, hogy egy $A \subset [a, b]$ részhalmazba esés valószínűsége az illető részhalmaz mértékével arányos, akkor ξ eloszlásfüggvénye nyilván

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1 & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

Ekkor a ξ valószínűségi változót **egyenletes eloszlásúnak** nevezzük a $[a, b]$ intervallumon. Továbbá

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvénye ξ–nek.

Normális eloszlás

Ha a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ **normális eloszlású** (m, σ^2) **paraméterekkel.**
Az, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, abból következik, hogy

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2/2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left[-\mathrm{e}^{-r^2/2}\right]_{r=0}^{r=\infty} = 2\pi.$$

Exponenciális eloszlás

Jelölje a ξ valószínűségi változó egy radioaktív atom élettartamát. Ez rendelkezik az úgynevezett **örökifjú tulajdonsággal:** ha $t, h > 0$, akkor

$$\mathrm{P}\{\xi \geq t + h \,|\, \xi \geq t\} = \mathrm{P}\{\xi \geq h\},$$

vagyis annak ellenére, hogy tudjuk, hogy az atom már megélt t időt, a még hátralevő élettartam eloszlása éppen olyan, mint a teljes élettartam eredeti eloszlása. Mivel

$$\mathrm{P}\{\xi \geq t + h \,|\, \xi \geq t\} = \frac{\mathrm{P}\{\xi \geq t + h, \, \xi \geq t\}}{\mathrm{P}\{\xi \geq t\}},$$

és $\mathrm{P}\{\xi \geq t + h, \, \xi \geq t\} = \mathrm{P}\{\xi \geq t + h\}$, ezért a $G(t) := \mathrm{P}\{\xi \geq t\}$ **túlélési függvényre** teljesül

$$\frac{G(t+h)}{G(t)} = G(h).$$

Be lehet látni, hogy ha G folytonos, akkor létezik olyan $\lambda > 0$, hogy

$$G(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad \text{ha } t > 0.$$

Ezért ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

alakú, ahol $\lambda > 0$. Ezt az eloszlást λ **paraméterű exponenciális eloszlásnak** nevezzük. Van sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Bomlási állandó:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \mathrm{P}\{t \leq \xi < t + h \,|\, \xi \geq t\} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda h}) = \lambda.$$

Valószínűségi vektorváltozó

$$\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k, \quad \text{azaz} \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_k),$$

ahol $\xi_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ valószínűségi változók

eloszlásfüggvénye: $F_\xi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,

$$F_\xi(x_1, \dots, x_k) := \mathrm{P}\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k\}$$

Valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye

Ha létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R}^k \to [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} f_\xi(t_1, \dots, t_k)\,\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k$$

teljesül minden $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ pontban, akkor az f_ξ függvényt ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye

Nyilván

$$\mathrm{P}\{a_i \le \xi_i \le b_i,\ i = 1, \ldots, k\} = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_k}^{b_k} f_\xi(t_1, \ldots, t_k)\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k,$$

sőt tetszőleges $B \subset \mathbb{R}^k$ (Borel-halmaz) esetén

$$\mathrm{P}\{(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in B\} = \underset{B}{\int \cdots \int} f_\xi(t_1, \ldots, t_k)\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k,$$

továbbá ha F_ξ k–szor folytonosan differenciálható, akkor

$$f_\xi(x_1, \ldots, x_k) = \frac{\partial^k F_\xi(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1 \ldots \partial x_k}.$$

Diszkrét valószínűségi vektorváltozó

A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ valószínűségi változó **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$ értékkészlet megszámlálható.

Ha $(\xi, \eta) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ diszkrét, akkor ξ és η is diszkrét. Ha ξ és η lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots,$ illetve $y_1, y_2, \ldots,$ akkor (ξ, η) lehetséges értékeinek halmaza $\{(x_i, y_j) : i, j = 1, 2, \ldots\}$.
Ha ismerjük (ξ, η) eloszlását, azaz a

$$\mathrm{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\} \qquad i, j = 1, 2, \ldots$$

valószínűségeket, akkor ki tudjuk számolni ξ és η eloszlását is:

$$\mathrm{P}\{\xi = x_i\} = \sum_j \mathrm{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\}, \quad \mathrm{P}\{\eta = y_j\} = \sum_i \mathrm{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\}.$$

Ezek (ξ, η) **peremeloszlásai / marginális eloszlásai.**

Polinomiális eloszlás

n független kísérletet hajtunk végre egy $A_1, A_2, \ldots, A_r$ teljes eseményrendszerre, $p_i := \mathrm{P}(A_i)$ (ekkor $p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1$). Ekkor A_i gyakorisága: $\xi_i := k_n(A_i)$, és $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó; lehetséges értékeinek halmaza:

$$\big\{(k_1, k_2, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r : k_i \geq 0,\ k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n\big\},$$

eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi_1 = k_1,\ \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_r = k_r\} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}\, p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r},$$

melyet $(n, p_1, p_2, \ldots, p_r)$ **paraméterű polinomiális eloszlásnak** nevezünk. Peremeloszlásai binomiális eloszlások:

$$\mathrm{P}\{\xi_i = k_i\} = \frac{n!}{k_i!(n-k_i)!}\, p_i^{k_i}(1-p_i)^{n-k_i}.$$

Polihipergeometrikus eloszlás

Ha visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leq N$), és ξ_i jelöli az i-edik színből húzott golyók számát, akkor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ olyan $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ értékeket vehet fel, melyekre minden $i = 1, 2, \ldots, r$ esetén teljesül $0 \leq k_i \leq N_i$, és $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, továbbá

$$\mathrm{P}\{\xi_1 = k_1,\, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_r = k_r\} = \frac{\binom{N_1}{k_1}\binom{N_2}{k_2}\cdots\binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor ξ eloszlását $(n, N_1, \ldots, N_r)$ **paraméterű polihipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.
Peremeloszlásai hipergeometrikus eloszlások:

$$\mathrm{P}\{\xi_i = k_i\} = \frac{\binom{N_i}{k_i}\binom{N-N_i}{n-k_i}}{\binom{N}{n}}.$$

Ha a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozónak létezik $f_{\xi,\eta}$ sűrűségfüggvénye, akkor a ξ, illetve η valószínűségi változóknak is létezik sűrűségfüggvényük, mégpedig

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,\mathrm{d}y, \qquad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Ezek (ξ, η) **peremeloszlásai / marginális eloszlásai.**

Független valószínűségi változók

A ξ és η valószínűségi változókat akkor nevezzük **függetleneknek**, ha tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{P}\{\xi < x,\ \eta < y\} = \mathrm{P}\{\xi < x\}\mathrm{P}\{\eta < y\},$$

azaz $F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$.

Független valószínűségi változók

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel és η diszkrét valószínűségi változó $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor ξ és η függetlensége azzal ekvivalens, hogy

$$\forall i, j \qquad \mathrm{P}\{\xi = x_i,\ \eta = y_j\} = \mathrm{P}\{\xi = x_i\}\mathrm{P}\{\eta = y_j\}.$$

Ha létezik (ξ, η)-nak $f_{\xi,\eta}$ sűrűségfüggvénye, akkor ξ és η függetlensége azzal ekvivalens, hogy

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f_{\xi,\eta}(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y).$$

Valószínűségeloszlások konvolúciója

Ha a ξ és η valószínűségi változók függetlenek, akkor azt mondjuk, hogy $\xi + \eta$ eloszlása a ξ és η **eloszlásának konvolúciója**.

Valószínűségeloszlások konvolúciója

Ha ξ és η független diszkrét valószínűségi változók, és a lehetséges értékeik nemnegatív egész számok, akkor a

$$\{\xi + \eta = k\} = \bigcup_{j=0}^{k} (\{\xi = j\} \cap \{\eta = k - j\})$$

diszjunkt felbontás alapján

$$\mathrm{P}\{\xi + \eta = k\} = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{P}\{\xi = j\}\mathrm{P}\{\eta = k - j\}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Ha a ξ és η független valószínűségi változóknak léteznek az f_ξ és f_η sűrűségfüggvényei, akkor

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u) f_\eta(x - u)\,\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Példák:

1. Ha ξ és η független binomiális eloszlásúak (n_1, p) illetve (n_2, p) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét binomiális eloszlás, mégpedig $(n_1 + n_2, p)$ paraméterekkel:

$$\sum_{i,j\,:\,i+j=k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{j} p^j (1-p)^{n_2-j} = \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}.$$

2. Ha ξ és η független normális eloszlásúak (m_1, σ_1^2) illetve (m_2, σ_2^2) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét normális eloszlás, mégpedig $(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ paraméterekkel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \mathrm{e}^{-\frac{(u-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \mathrm{e}^{-\frac{(x-u-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.$$

Intuíció:

Tekintsünk egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változót $x_1, \ldots, x_N$ lehetséges értékekkel.

n független kísérletet hajtunk végre

$A_k := \{\xi = x_k\}$ relatív gyakorisága

$$r_n(A_k) \approx \mathrm{P}(A_k) = \mathrm{P}\{\xi = x_k\},$$

ezért az x_k értéket körülbelül $n \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\}$ esetben kapjuk, így **a megfigyelt értékek átlaga körülbelül**

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot n \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\} = \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\}.$$

Valószínűségi változó várható értéke

Ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor az

$$\mathrm{E}\,\xi := \sum_k x_k \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\}$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_k |x_k| \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\} < \infty$.

Ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ egy abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek suruségfüggvénye $f_\xi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, akkor az

$$\mathrm{E}\,\xi := \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_\xi(x)\,\mathrm{d}x$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

Példák:

1. Ha ξ binomiális eloszlású (n, p) paraméterekkel, akkor
$$\mathrm{E}\,\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$$

2. Ha egy egységnyi oldalú négyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot, és ξ jelöli a pontnak a legközelebbi oldaltól való távolságát, akkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{1}{6}$, hiszen

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0, \\ 1-(1-2x)^2 & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{ha } x > \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} 4-8x & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{egyébként}, \end{cases}$$

$$\mathrm{E}\,\xi = \int_0^{1/2} x(4-8x)\,\mathrm{d}x = \left[2x^2 - \frac{8}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1}{6}.$$

3. *Az A és B játékosok a következő játékot játszák. Felváltva dobnak egy szabályos érmét; A kezd, és az nyer, akinek először sikerül fejet dobnia. Az első dobásnál 2–2 forintot tesznek be, és minden dobás előtt duplázzák a tétet, azaz ha az n-edik dobásra sikerül fejet dobni és n páratlan, akkor A nyer 2^n forintot B-től, ha pedig n páros, akkor B nyer 2^n forintot A-tól. Mennyi az A illetve B játékos várható nyereménye?*
   Jelölje ξ az A játékos nyereményét (mely pozitív, ha A nyer, és negatív, ha A veszít). Ekkor ξ lehetséges értékei $2, -4, 8, -16, \ldots$ és $\mathrm{P}\{\xi = 2\} = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}\{\xi = -4\} = \frac{1}{4}$, $\ldots$ Mivel
   $$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty,$$
   így ξ várható értéke nem létezik!
4. Legyen ξ olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Ekkor nem létezik $\mathrm{E}\xi$, mert $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \infty$.

Várható érték tulajdonságai

Ha ξ és η valószínűségi változók és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

- $\mathrm{E}(a\xi) = a\,\mathrm{E}\,\xi$ (homogenitás)
- $\mathrm{E}(\xi + \eta) = \mathrm{E}\,\xi + \mathrm{E}\,\eta$ (additivitás)
- $\mathrm{E}(a\xi + b\eta) = a\,\mathrm{E}\,\xi + b\,\mathrm{E}\,\eta$ (linearitás)
- ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathrm{E}(\xi\eta) = \mathrm{E}\,\xi \cdot \mathrm{E}\,\eta$
- ha $\xi \leq \eta$, akkor $\mathrm{E}\,\xi \leq \mathrm{E}\,\eta$ (monotonitás)
- ha $\xi \geq 0$, akkor $\mathrm{E}\,\xi \geq 0$ (pozitivitás)
- $\mathrm{E}\,|\xi| \leq |\,\mathrm{E}\,\xi|$
- $\mathrm{E}\,|\xi\eta| \leq \sqrt{\mathrm{E}\,\xi^2\ \mathrm{E}\,\eta^2}$ (Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség)

Valószínűségi változó függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathrm{E}\, g(\xi) = \sum_k g(x_k) \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\},$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens.

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\mathrm{E}\, g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_\xi(x)\,\mathrm{d}x,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens.

Valószínűségi vektorváltozó függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók $x_1, x_2, \ldots,$ illetve $y_1, y_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathrm{E}\, g(\xi, \eta) = \sum_{k,\ell} g(x_k, y_\ell) \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k, \eta = \ell\},$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens.

Ha (ξ, η) abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó $f_{\xi,\eta}$ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\mathrm{E}\, g(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot f_{\xi\,\eta}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens.

Valószínűségi változó varianciája / szórásnégyzete

$$\operatorname{var}\xi := \mathrm{D}^2\xi := \mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2\right].$$

Variancia / szórásnégyzet kiszámolása

$$\operatorname{var}\xi = \mathrm{E}\left[\xi^2 - 2\xi\,\mathrm{E}\,\xi + (\mathrm{E}\,\xi)^2\right] = \mathrm{E}(\xi^2) - 2\cdot\mathrm{E}\,\xi\cdot\mathrm{E}\,\xi + (\mathrm{E}\,\xi)^2 = \mathrm{E}(\xi^2) - (\mathrm{E}\,\xi)^2,$$

így ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\operatorname{var}\xi = \sum_k x_k^2 \cdot \mathrm{P}\{\xi = k\} - \left(\sum_k x_k \cdot \mathrm{P}\{\xi = k\}\right)^2,$$

ha pedig ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\operatorname{var}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Variancia / szórásnégyzet tulajdonságai

Ha ξ és η valószínűségi változók és $a \in \mathbb{R}$, akkor

- $\operatorname{var}(\xi + a) = \operatorname{var} \xi$ (eltolásinvariancia)
- $\operatorname{var}(c \cdot \xi) = c^2 \cdot \operatorname{var} \xi$ (homogenitás)
- ha ξ és η függetlenek, akkor $\operatorname{var}(\xi + \eta) = \operatorname{var} \xi + \operatorname{var} \eta$ (additivitás)

Valószínűségi változók kovarianciája

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) := \mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)(\eta - \mathrm{E}\,\eta)\right]$$

Addíciós képlet

Ha ξ és η valószínűségi változók, akkor

$$\operatorname{var}(\xi + \eta) = \operatorname{var} \xi + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta) + \operatorname{var} \eta$$

Példa:

Legyen η **standard normális eloszlású**, azaz normális eloszlású $(0,1)$ paraméterekkel. Ekkor

$$\mathsf{E}\,\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\substack{K\to-\infty \\ L\to+\infty}} \left[-\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{x=K}^{x=L} = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(\eta^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 1, \end{aligned}$$

$$\operatorname{var}\eta = \mathsf{E}(\eta^2) - \big(\mathsf{E}\,\eta\big)^2 = 1.$$

Ha pedig ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor

$$\xi = \sigma \cdot \eta + m,$$

ahol

$$\eta = \frac{\xi - m}{\sigma}$$

standard normális eloszlású, hiszen η eloszlásfüggvénye

$$F_\eta(x) = \mathrm{P}\{\eta < x\} = \mathrm{P}\left\{\frac{\xi - m}{\sigma} < x\right\} = \mathrm{P}\{\xi < \sigma \cdot x + m\} = F_\xi(\sigma \cdot x + m),$$

így η sűrűségfüggvénye

$$f_\eta(x) = F'_\eta(x) = \sigma \cdot F'_\xi(\sigma x + m) = \sigma \cdot f_\xi(\sigma x + m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2},$$

ezért

$$\mathrm{E}\,\xi = \sigma \cdot \mathrm{E}\,\eta + m = m, \qquad \mathrm{var}\,\xi = \sigma^2 \cdot \mathrm{var}\,\eta = \sigma^2.$$

Valószínűségi változók korrelációs együtthatója

$$\text{corr}(\xi, \eta) := \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\text{var}\,\xi \cdot \text{var}\,\eta}}.$$

Ha $\text{corr}(\xi, \eta) = 0$ azaz $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ **és** η **korrelálatlanok.**

Ha

$$\text{corr}(\xi, \eta) > 0 \quad \text{azaz} \quad \text{cov}(\xi, \eta) > 0,$$

akkor ξ **és** η **pozitívan korreláltak**, ha pedig

$$\text{corr}(\xi, \eta) < 0 \quad \text{azaz} \quad \text{cov}(\xi, \eta) < 0,$$

akkor ξ **és** η **negatívan korreláltak.**

Ha ξ és η függetlenek, akkor ξ és η korrelálatlanok, de ez fordítva általában nem igaz.

Példa: Legyen a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású a $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$ és $(1, 0)$ pontokon, azaz

$$\mathrm{P}\{\xi=-1, \eta=0\}=\mathrm{P}\{\xi=0, \eta=-1\}=\mathrm{P}\{\xi=0, \eta=1\}=\mathrm{P}\{\xi=1, \eta=0\}=\frac{1}{4}.$$

Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{E}\,\eta = 0$ és $\mathrm{E}(\xi\eta) = 0$ miatt

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{E}(\xi\eta) - \mathrm{E}\,\xi \cdot \mathrm{E}\,\eta = 0,$$

azaz ξ és η korrelálatlanok, viszont a peremeloszlások

$$\mathrm{P}\{\xi = -1\} = \mathrm{P}\{\xi = 1\} = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}\{\xi = 0\} = \frac{1}{2},$$
$$\mathrm{P}\{\eta = -1\} = \mathrm{P}\{\eta = 1\} = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}\{\eta = 0\} = \frac{1}{2},$$

ezért ξ és η nem függetlenek, hiszen például

$$\mathrm{P}\{\xi = 1,\, \eta = 0\} = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}\{\xi = 1\} \cdot \mathrm{P}\{\eta = 0\} = \frac{1}{8}.$$

Kovariancia és korrelációs együttható tulajdonságai

- $\operatorname{var}\xi = \operatorname{cov}(\xi, \xi)$
- Ha ξ és η valószínűségi változók, akkor

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi), \qquad \operatorname{corr}(\xi, \eta) = \operatorname{corr}(\eta, \xi) \qquad \text{(szimmetria)}$$

- Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ és $\eta_1, \ldots, \eta_m$ valószínűségi változók és $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, akkor

$$\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i, \sum_{j=1}^{m} b_j\eta_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \operatorname{cov}(\xi_i, \eta_j) \qquad \text{(bilinearitás)}$$

- $|\operatorname{corr}(\xi, \eta)| \leq 1$, és $|\operatorname{corr}(\xi, \eta)| = 1$ akkor és csak akkor, ha valamely $a \neq 0$ és b valós számokkal $\mathrm{P}\{\eta = a \cdot \xi + b\} = 1$ teljesül; itt $a > 0$ illetve $a < 0$ aszerint, hogy $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 1$ illetve $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = -1$.

Momentumok, ferdeség, csúcsosság / lapultság

Legyen ξ valószínűségi változó, k pozitív egész. Ekkor

- ***k*–adik momentum:** $\mathrm{E}(\xi^k)$
- ***k*–adik centrális momentum:** $\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^k\right]$
- ***k*–adik abszolút momentum:** $\mathrm{E}\left(|\xi|^k\right)$
- ***k*–adik abszolút centrális momentum:** $\mathrm{E}\left[|\xi - \mathrm{E}\,\xi|^k\right]$
- **ferdeség:** $\dfrac{\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^3\right]}{\left(\mathrm{E}\,[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2]\right)^{3/2}}$
- **csúcsosság:** $\dfrac{\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^4\right]}{\left(\mathrm{E}\,[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2]\right)^{2}} - 3$

Tehát $\mathrm{E}\,\xi$ az első momentum, $\mathrm{var}\,\xi$ pedig a második (abszolút) centrális momentum

Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor ξ és $a\xi + b$ ferdesége, illetve ξ és $a\xi + b$ csúcsossága megegyezik.

Példa: Legyen η standard normális eloszlású. Ekkor $\mathrm{E}\eta = 0$, $\operatorname{var}\eta = 1$,

$$\mathrm{E}(\eta^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\eta^4) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x^3 \mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 3\,\mathrm{E}(\eta^2) = 3,\end{aligned}$$

ezért η ferdesége és csúcsossága is 0.

Ha ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor $\xi = \sigma\,\eta + m$, ahol η standard normális eloszlású, ezért ξ ferdesége és csúcsossága is 0.

Valószínűségi változó kvantilisei, mediánja, interkvartilise

Legyen $q \in (0,1)$. A $c_q \in \mathbb{R}$ szám *q*-**kvantilise** a ξ valószínűségi változónak, ha

$$\mathrm{P}\{\xi < c_q\} \le q, \qquad \text{és} \qquad \mathrm{P}\{\xi > c_q\} \le 1-q.$$

Az $\frac{1}{2}$-kvantilist **mediánnak** nevezzük.

Az $c_{3/4} - c_{1/4}$ különbséget **interkvartilisnek** nevezzük.

Legyen

$$a := \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{P}\{\xi > x\} \le 1-q\right\}, \quad b := \sup\left\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{P}\{\xi < x\} \le q\right\}.$$

Ekkor $a \le b$, és egy $c \in \mathbb{R}$ szám akkor és csak akkor q-kvantilise ξ-nek, ha $a \le c \le b$.

Szokták csak az $\frac{a+b}{2}$ számot tekinteni a q-kvantilisnek.

Valószínűségi változó kvantilisei

- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek van megoldása de csak egy, akkor ez az $F_\xi^{-1}(q)$ megoldás az egyetlen q–kvantilis.
- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek nincs megoldása, akkor egyetlen q–kvantilis van, mégpedig az a szám, ahol az F_ξ függvény átugorja a q számot.
- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek több megoldása van, akkor a megoldáshalmaz az $(a, b]$ vagy $[a, b]$ intervallum, és a q–kvantilisek éppen az $[a, b]$ intervallum pontjai.

Valószínűségi változó kvantilisei módusza

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor az x_i szám **módusza** ξ–nek, ha x_i–t a legnagyobb valószínűséggel veszi fel, azaz

$$\mathrm{P}\{\xi = x_i\} = \sup_k \mathrm{P}\{\xi = x_k\}.$$

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor az x szám **módusza** ξ–nek, ha x globális maximumhelye a sűrűségfüggvénynek, azaz

$$f_\xi(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} f_\xi(y).$$

p paraméterű Bernoulli–eloszlás

A esemény, $p := \mathrm{P}(A)$

$$\xi := k_1(A) = \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0 & \text{ha } A \text{ nem következik be} \end{cases}$$

diszkrét valószínűségi változó; lehetséges értékei: 0 és 1, eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi = 1\} = p, \qquad \mathrm{P}\{\xi = 0\} = 1 - p.$$

Ezt az eloszlást p **paraméterű Bernoulli–eloszlásnak** nevezzük.

Nyilván

$$\mathrm{E}\,\xi = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p,$$
$$\mathrm{E}(\xi^2) = p \cdot 1^2 + (1-p) \cdot 0^2 = p,$$
$$\operatorname{var}\xi = \mathrm{E}(\xi^2) - (\mathrm{E}\,\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

(n, p) paraméterű Binomiális eloszlás

A esemény, $p := \mathrm{P}(A)$; n független kísérlet; A gyakorisága: $\xi := k_n(A)$ diszkrét valószínűségi változó; lehetséges értékeinek halmaza: $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ha $\xi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ beköv. az } i\text{–edik alkalommal,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$

akkor $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, és $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független, p paraméterű Bernoulli–eloszlásúak. Ezért

$$\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{E}\,\xi_1 + \cdots + \mathrm{E}\,\xi_n = np,$$

$$\operatorname{var}\xi = \operatorname{var}\xi_1 + \cdots + \operatorname{var}\xi_n = np(1-p).$$

Módusza: $\lfloor (n+1)p \rfloor$, és még $\lfloor (n+1)p \rfloor - 1$ is, ha $(n+1)p$ egész.

$(n, M, N-M)$ paraméterű hipergeometrikus eloszlás

Egy dobozban M piros és $N-M$ fekete golyó van ($M < N$). Visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \le N$), és ξ jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor ξ olyan k értékeket vehet fel, melyre teljesül $0 \le k \le n$, $k \le M$, és $n-k \le N-M$, eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ha $\xi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{–edik golyó piros,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$ akkor $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, és a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók $\frac{M}{N}$ paraméterű Bernoulli-eloszlásúak, DE NEM FÜGGETLENEK! Például $i \ne j$ esetén

$$\mathrm{P}\{\xi_i = 1,\, \xi_j = 1\} = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}, \qquad \mathrm{P}\{\xi_i = 1\} = \mathrm{P}\{\xi_j = 1\} = \frac{M}{N}.$$

$$\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{E}\,\xi_1 + \cdots + \mathrm{E}\,\xi_n = n \cdot \frac{M}{N},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\xi = \operatorname{cov}(\xi,\xi) &= \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \sum_{j=1}^{n}\xi_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j) = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{var}\xi_i + 2\sum_{1\le i<j\le n}\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j),\end{aligned}$$

ahol

$$\operatorname{var}\xi_i = \frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right), \qquad \operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j) = \frac{M(M-N)}{N^2(N-1)},$$

így

$$\operatorname{var}\xi = n\cdot\frac{M}{N}\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

p paraméterű elsőrendű negatív binomiális eloszlás

A esemény, $p := \mathrm{P}(A)$, melyre $0 < p < 1$. Jelölje $\xi :=$ az A első bekövetkezéséhez szükséges független kísérletek számát; lehetséges értékei: $1, 2, \ldots, \infty$, eloszlása: $\mathrm{P}\{\xi = \infty\} = 0$, és

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = p \cdot (1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

$$\mathrm{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1},$$

ahol $q := 1 - p$, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right)' = \left(\frac{1}{1-q} \right)' = \frac{1}{(1-q)^2},$$

így

$$\mathrm{E}\,\xi = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

$$\mathrm{E}(\xi^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[k + k(k-1)\right] \cdot p(1-p)^{k-1}$$
$$= p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} + pq\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2},$$

ahol

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)'' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)'' = \left(\frac{1}{1-q}\right)'' = \frac{2}{(1-q)^3},$$

így

$$\mathrm{E}(\xi^2) = \frac{1}{p} + pq \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Végül

$$\operatorname{var}\xi = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

λ paraméterű Poisson-eloszlás

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, \dots, \qquad \text{ahol } \lambda > 0.$$

$$\mathsf{E}\,\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+1}}{\ell!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda,$$

$$\mathsf{E}(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \big[k + k(k-1)\big] \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$= \lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} = \lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+2}}{\ell!} = \lambda + \lambda^2,$$

$$\operatorname{var}\xi = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Egyenletes eloszlás az $\{1, 2, \ldots, N\}$ halmazon

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N.$$

$$\mathrm{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)}{2N} = \frac{N+1}{2},$$

$$\mathrm{E}(\xi^2) = \sum_{k=1}^{N} k^2 \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6},$$

$$\operatorname{var}\xi = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2-1}{12}.$$

Egyenletes eloszlás az $[a, b]$ intervallumon

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \le b, \\ 1 & \text{ha } x > b. \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{ha } a \le x \le b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$\xi = a + (b-a)\cdot\eta$ ahol η egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, hiszen

$$\mathrm{P}\{\eta < y\} = \mathrm{P}\left\{\frac{\xi - a}{b-a} < y\right\} = \mathrm{P}\{\xi < a+(b-a)y\} = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \le 0, \\ y & \text{ha } 0 \le y \le 1, \\ 1 & \text{ha } y \ge 1. \end{cases}$$

$$\mathrm{E}\,\eta = \int_0^1 y \,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{E}(\eta^2) = \int_0^1 y^2 \,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{var}\eta = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

ezért

$$\mathrm{E}\,\xi = a + (b-a)\,\mathrm{E}\,\eta = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$\operatorname{var}\xi = (b-a)^2 \operatorname{var}\eta = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

λ paraméterű exponenciális eloszlás

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \qquad \text{ahol } \lambda > 0.$$

$$\mathrm{E}\,\xi = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{E}(\xi^2) = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty} + 2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$\mathrm{var}\,\xi = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

(m, σ^2) paraméterű normális eloszlás

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{ahol } m \in \mathbb{R}, \ \sigma > 0.$$

$\mathsf{E}\,\xi = m$, $\operatorname{var}\xi = \sigma^2$, ferdesége 0, csúcsossága 0.

Eloszlásfüggvénye:

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Továbbá $\xi = \sigma \cdot \eta + m$, ahol η standard normális eloszlású, azaz paraméterei $m = 0$, $\sigma = 1$ így eloszlásfüggvénye

$$\Phi(x) := F_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2} \,\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R},$$

melynek értékei táblázatokban megtalálhatók.