

# Gazdasági matematika I.

Losonczi László és Pap Gyula anyagai alapján

Debreceni Egyetem, Informatikai Kar

I. félév

*Előadó:* **Hajdu Lajos**

## Félévközi kötelező házi feladatok beadási határideje:

- Az 1. házi feladatot a szakhét utáni héten kell beadni a gyakorlatvezetőnek.
- A 2. házi feladatot az utolsó előtti héten kell beadni a gyakorlatvezetőnek.

Ezek teljesítése, valamint a gyakorlatra járás (legfeljebb 3 hiányzás) szükséges a gyakorlati aláíráshoz!

**Vizsgaidőpontok:** Lásd Neptun.

*Előadáskövető anyagok és feladatok*

[math.unideb.hu/hajdu-lajos](http://math.unideb.hu/hajdu-lajos)

# 1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI ÉS A VALÓS SZÁMOK

## 1.1 Halmazok

### Tartalmazás jelölése

$a \in B$  ( $a$  eleme a  $B$  halmaznak)

$b \notin A$  ( $b$  nem eleme az  $A$  halmaznak)

### Halmazok megadási módjai

- **felsorolás;** például  $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$
- **ismert halmaz adott tulajdonságú elemeinek megadása;** például  $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ páros}\}$ , ahol  $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$  a **természetes számok** halmaza

### Definíciók

- **Üres halmaz:** melynek egyetlen eleme sincs; jelölése:  $\emptyset$
- Az  $A$  és  $B$  halmazok **egyenlőek**, ha elemei ugyanazok; jelölése:  $A = B$ ; tagadása:  $A \neq B$
- Az  $A$  halmaz **részhalmaza** a  $B$  halmaznak, ha  $A$  minden eleme benne van a  $B$  halmazban; jelölése:  $A \subset B$ , illetve  $B \supset A$ , amit úgy olvasunk, hogy  $B$  **tartalmazza** az  $A$  halmazt
- Az  $A$  halmaz **valódi részhalmaza** a  $B$  halmaznak, ha  $A \subset B$  és  $A \neq B$

### Logikai alapfogalmak

- **Állítás:** olyan kijelentés, melyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.
- **Logikai műveletek:**
  - $\neg P$  (nem  $P$ , azaz  $P$  tagadása) pontosan akkor igaz, ha  $P$  hamis
  - $P \wedge Q$  ( $P$  és  $Q$ ) pontosan akkor igaz, ha  $P$  és  $Q$  is igaz
  - $P \vee Q$  ( $P$  vagy  $Q$ ) pontosan akkor igaz ha,  $P$  és  $Q$  legalább egyike igaz
  - $P \implies Q$  ( $P$ -ből következik  $Q$ ) pontosan akkor igaz, ha  $P$  hamis vagy ha  $Q$  igaz
  - $P \iff Q$  ( $P$  ekvivalens  $Q$ -val) pontosan akkor igaz, ha  $P$  és  $Q$  vagy mindketten igazak vagy mindketten hamisak

# 1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI ÉS A VALÓS SZÁMOK

## 1.1 Halmazok

$P \implies Q$  esetén azt mondjuk, hogy  $P$  **elegendő**  $Q$  teljesüléséhez, másképpen  $Q$  **szükséges**  $P$  teljesüléséhez

$P \iff Q$  esetén azt mondjuk, hogy  $P$  **szükséges és elegendő**  $Q$  teljesüléséhez

- $P \iff Q$  pontosan akkor igaz, ha  $P \implies Q$  és  $Q \implies P$  is igaz, azaz

$$(P \iff Q) \iff (P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$$

tetszőleges  $P$  és  $Q$  állításokra igaz

- Az indirekt bizonyítás alapja:

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)$$

tetszőleges  $P$  és  $Q$  állításokra igaz

### Logikai kvantorok

- **univerzális kvantor:**  $\forall x$  = minden  $x$ -re
- **egzisztenciális kvantor:**  $\exists x$  = van olyan  $x$  melyre

Példák:

$$A \subset B \iff (\forall x) (x \in A \implies x \in B)$$

és

$$A = B \iff (\forall x) ((x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A))$$

igazak tetszőleges  $A$  és  $B$  halmazokra

### Műveletek egy $X$ halmaz részhalmazáival

- $A$  és  $B$  egyesítése = uniója:

$$A \cup B := \{x \in X : x \in A \text{ vagy } x \in B\}$$

- $A$  és  $B$  metszete = közös része:

$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \text{ és } x \in B\}$$

- $A$  és  $B$  különbsége:

$$A \setminus B := \{x \in X : x \in A \text{ és } x \notin B\}$$

- $A$  komplementere ( $X$ -re nézve):

$$\bar{A} := X \setminus A$$



### Halmazműveletek tulajdonságai

● **kommutativitás:**  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$

● **asszociativitás:**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

● **disztributivitás:**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

● **idempotencia:**  $A \cup A = A$ ,  $A \cap A = A$

● **de Morgan azonosságok:**  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ,  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

# 1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI ÉS A VALÓS SZÁMOK

## 1.2 Relációk

### Két halmaz Descartes szorzata

Az  $A$  és  $B$  halmazok **Descartes szorzata** (vagy direkt szorzata) e halmazok elemeiből képezett összes  $(a, b)$  *rendezett párok* halmaza, ahol  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Jelölése:  $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ . További jelölés:  $A^2 := A \times A$ .

### Rendezett párok egyenlősége

$(a, b) = (c, d)$  akkor és csakis akkor ha  $a = c$ ,  $b = d$ .

### Két halmaz közötti reláció

Az  $A$  és  $B$  halmazok Descartes szorzatának egy  $R \subset A \times B$  részhalmazát az  $A$  és  $B$  közötti **relációnak** nevezzük.

Ha  $(a, b) \in R$ , akkor azt mondjuk, hogy az  $a$  **elem  $R$  relációban van  $b$ -vel**. Jelölése:  $a R b$ . Ha  $A = B$ , akkor az  $A$  és  $B$  közötti relációt  **$A$ -n értelmezett relációnak** mondjuk.

### Féligrendezés, rendezés

Az  $A$  halmazon értelmezett  $R \subset A \times A$  reláció **féligrendezés**, ha

- **reflexív**, azaz  $(\forall a \in A) a R a$
- **antiszimmetrikus**, azaz  $(\forall a, b \in A) (a R b \wedge b R a) \implies (a = b)$ .
- **transzitiv**, azaz  $(\forall a, b, c \in A) (a R b \wedge b R c) \implies a R c$ .

Az  $A$  halmazon értelmezett  $R \subset A \times A$  reláció **rendezés**, ha féligrendezés, és ha  $(\forall a, b \in A) (a R b \vee b R a)$ .

Példák:

- Egy  $X$  halmaz összes részhalmazán a  $\subset$  tartalmazási reláció féligrendezés.
- A valós számok  $\mathbb{R}$  halmazán a  $\leq$  reláció rendezés.

### Valós számhalmazok korlátosságá

- $A \subset \mathbb{R}$  **felülről korlátos**, ha  $(\exists k \in \mathbb{R}) (\forall a \in A) a \leq k$ . Ekkor a  $k$  számot  $A$  egy **felső korlátjának** nevezzük.
- $A \subset \mathbb{R}$  **alulról korlátos**, ha  $(\exists k' \in \mathbb{R}) (\forall a \in A) a \geq k'$ . Ekkor a  $k'$  számot  $A$  egy **alsó korlátjának** nevezzük.
- $A \subset \mathbb{R}$  **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.
- $s \in \mathbb{R}$  az  $A \subset \mathbb{R}$  **pontos felső korlátja = szuprémuma**, ha
  - $s$  az  $A$  felső korlátja;
  - $A$  bármely  $s'$  felső korlátjára  $s \leq s'$ .

Jelölés:  $s = \sup A$ .

- $i \in \mathbb{R}$  az  $A \subset \mathbb{R}$  **pontos alsó korlátja = infimuma**, ha
  - $i$  az  $A$  alsó korlátja;
  - $A$  bármely  $i'$  alsó korlátjára  $i \geq i'$ .

Jelölés:  $i = \inf A$ .

### Függvény

- Az  $A$  és  $B$  halmazok között értelmezett  $F \subset A \times B$  reláció **függvény**, ha minden  $a \in A$  elemhez pontosan egy olyan  $b \in B$  elem létezik, melyre  $aFb$  teljesül. Ilyenkor a  $b = F(a)$  jelölést használjuk, a függvény jelölése pedig  $F : A \rightarrow B$ .
- $\mathcal{D}_F := A$  az  $F$  függvény **értelmezési tartománya**.
- $\mathcal{R}_F := \{F(a) : a \in A\}$  az  $F$  függvény **értékkészlete**.
- Az  $F : A \rightarrow B$  függvény **injektív**, ha
$$(\forall a, b \in A) \quad a \neq b \implies F(a) \neq F(b)$$
- Az  $F : A \rightarrow B$  függvény **szürjektív**, ha  $\mathcal{R}_F = B$ .
- Az  $F : A \rightarrow B$  függvény **bijektív**, ha injektív és szürjektív.
- Ha  $F : A \rightarrow B$  **injektív**, akkor az  $F^{-1} : \mathcal{R}_F \rightarrow A$  **inverz függvény** értelmezése:  $F^{-1}(b) = a$  ha  $b = F(a)$ .

# 1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI ÉS A VALÓS SZÁMOK

## 1.3 A valós számok axiómarendszere

A valós számok  $\mathbb{R}$  halmaza teljesíti a következő 3 axiómacsoportot:

### Testaxiómák

$\mathbb{R}$ -ben két művelet van értelmezve:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto x + y \quad \text{összeadás,}$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto x \cdot y \quad \text{szorzás.}$$

Az összeadás axiómái:

$$\begin{array}{ll} (\forall x, y \in \mathbb{R}) & x + y = y + x, \\ (\forall x, y, z \in \mathbb{R}) & x + (y + z) = (x + y) + z, \\ (\exists 0 \in \mathbb{R}) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) & x + 0 = x, \\ (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\exists -x \in \mathbb{R}) & x + (-x) = 0. \end{array}$$

# 1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI ÉS A VALÓS SZÁMOK

## 1.3 A valós számok axiómarendszere

### Testaxiómák

A szorzás axiómái:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x \cdot y = y \cdot x,$$

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

$$(\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \cdot 1 = x,$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0) \quad (\exists x^{-1} \in \mathbb{R}) \quad x \cdot x^{-1} = 1.$$

Továbbá

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

# 1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI ÉS A VALÓS SZÁMOK

## 1.3 A valós számok axiómarendszere

### Rendezési axiómák

$\mathbb{R}$ -en értelmezve van egy  $\leq$  **rendezési reláció**, melyre

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x \leq y \implies x + z \leq y + z,$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad (0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \implies 0 \leq x \cdot y.$$

### Teljességi axióma

$\mathbb{R}$  a rendezésre nézve **teljes**, azaz  $\mathbb{R}$  bármely nemüres felülről korlátos részhalmazának létezik pontos felső korlátja.

### $\mathbb{R}$ létezése

*Létezik olyan  $\mathbb{R}$  halmaz, mely teljesíti ezt a 3 axiómacsoportot (és ez a halmaz bizonyos értelemben egyértelmű).*

A valós számokat a *számegyenesen* modellezhetjük.



# 1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI ÉS A VALÓS SZÁMOK

## 1.4 $\mathbb{R}$ nevezetes részhalmazai, abszolút érték, távolság

### $\mathbb{R}$ nevezetes részhalmazai

- **Természetes számok halmaza:**  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- **Egész számok halmaza:**  $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
- **Racionális számok halmaza:**  $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q, \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

$\mathbb{N}$  az  $\mathbb{R}$ -nek az a legszűkebb részhalmaza, melyre teljesül az, hogy

- $1 \in \mathbb{N}$ ,
- ha  $n \in \mathbb{N}$ , akkor  $n + 1 \in \mathbb{N}$ .

### Teljes indukció

Ha egy  $M \subset \mathbb{N}$  részhalmazra teljesül az, hogy

- $1 \in M$ ,
- ha  $n \in M$ , akkor  $n + 1 \in M$ ,

akkor  $M = \mathbb{N}$ .

# 1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI ÉS A VALÓS SZÁMOK

## 1.4 $\mathbb{R}$ nevezetes részhalmazai, abszolút érték, távolság

### $\mathbb{R}$ intervallumai

$a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  esetén

**nyílt:**  $]a, b[ := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ,

**zárt:**  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ,

**balról nyílt, jobbról zárt:**  $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ ,

**balról zárt, jobbról nyílt:**  $[a, b[ := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ ,

**elfajult:**  $[a, a] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq a\} = \{a\}$ ,

**végtelen:**  $]a, \infty[ := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ ,  $[a, \infty[ := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ ,

$] - \infty, b[ := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ ,  $] - \infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ ,

$] - \infty, \infty[ := \mathbb{R}$ .

# 1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI ÉS A VALÓS SZÁMOK

## 1.4 $\mathbb{R}$ nevezetes részhalmazai, abszolút érték, távolság

### Valós szám abszolút értéke

Az  $x \in \mathbb{R}$  szám **abszolút értéke**:  $|x| := \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0, \\ -x & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

### Az abszolút érték tulajdonságai

*Bármely  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén*

- $|x| \geq 0$ , és  $|x| = 0 \iff x = 0$ ,
- $|xy| = |x| |y|$ ,
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ ,
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$ ,
- $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$ ,
- $|x| < a \iff -a < x < a$ .

# 1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI ÉS A VALÓS SZÁMOK

## 1.4 $\mathbb{R}$ nevezetes részhalmazai, abszolút érték, távolság

### $\mathbb{R}$ pontjainak távolsága

Az  $x \in \mathbb{R}$  és  $y \in \mathbb{R}$  pontok **távolsága**:  $d(x, y) := |x - y|$

### A távolság tulajdonságai

*Bármely  $x, y, z \in \mathbb{R}$  esetén*

- $d(x, y) \geq 0$ , és  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
- $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

# 1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI ÉS A VALÓS SZÁMOK

## 1.5 Topológiai alapfogalmak

- Az  $a \in \mathbb{R}$  **pont**  $\varepsilon > 0$  **sugarú (nyílt) környezete:**

$$K(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} : d(x, a) < \varepsilon\} = ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

- Az  $a \in \mathbb{R}$  pont az  $A \subset \mathbb{R}$  **halmaz belső pontja**, ha  $a$ -nak van olyan környezete, mely teljesen benne van  $A$ -ban, azaz ha

$$(\exists \varepsilon > 0) (K(a, \varepsilon) \subset A).$$

- Az  $a \in \mathbb{R}$  pont az  $A \subset \mathbb{R}$  **halmaz izolált pontja**, ha  $a \in A$ , és  $a$ -nak van olyan környezete, melyben  $a$ -n kívül nincs  $A$ -beli pont:

$$(a \in A) \wedge ((\exists \varepsilon > 0) (K(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset).$$

- Az  $a \in \mathbb{R}$  pont az  $A \subset \mathbb{R}$  **halmaz torlódási pontja**, ha  $a$  bármely környezetében van tőle különböző  $A$ -beli pont, azaz ha

$$(\forall \varepsilon > 0) ((K(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset).$$

- Az  $a \in \mathbb{R}$  pont az  $A \subset \mathbb{R}$  **halmaz határpontja**, ha  $a$  bármely környezetében van  $A$ -beli és nem  $A$ -beli pont is, azaz ha

$$(\forall \varepsilon > 0) \left( (K(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset) \wedge (K(a, \varepsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset) \right).$$

# 1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI ÉS A VALÓS SZÁMOK

## 1.5 Topológiai alapfogalmak

- $A \subset \mathbb{R}$  összes belső pontjainak halmazát  $A$  **belsejének** nevezzük és  $A^\circ$ -rel jelöljük.
- $A \subset \mathbb{R}$  összes határpontjainak halmazát  $A$  **határának** nevezzük és  $\partial A$ -val jelöljük.
- Az  $A \subset \mathbb{R}$  halmazt **nyíltnak** nevezzük, ha minden pontja belső pontja  $A$ -nak.
- Az  $A \subset \mathbb{R}$  halmazt **zártnak** nevezzük, ha komplementere nyílt.

## 2. SOROZATOK

### 2.1 Sorozatok korlátossága, monotonitása, konvergenciája

#### Valós számsorozat

Egy  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt **valós számsorozatnak** nevezünk.

Jelölés:  $(a_n) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ahol  $a_n := a(n)$  ha  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Sorozat megadása

- képlettel; például  $a_n = \frac{1}{n}$  ha  $n \in \mathbb{N}$ .
- rekurzív módon; például  $a_1 = 1$ , és  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$  ha  $n \in \mathbb{N}$ .
- szabállyal; például  $a_n :=$  az  $n$ -edik prímszám.

#### Sorozat korlátossága

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **felülről korlátos**, ha  $(\exists k \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq k$ .  
Az ilyen  $k$  számot a sorozat **felső korlátjának** nevezzük.

## 2. SOROZATOK

### 2.1 Sorozatok korlátossága, monotonitása, konvergenciája

#### Sorozat korlátossága

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **alulról korlátos**, ha  $(\exists k' \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) a_n \geq k'$ .  
Az ilyen  $k'$  számot a sorozat **alsó korlátjának** nevezzük.

#### Sorozat korlátossága

Az  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat akkor és csakis akkor korlátos, ha

$$(\exists K \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) |a_n| \leq K.$$

#### Sorozat monotonitása

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **monoton növekvő**, ha  $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} \geq a_n$ .
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **monoton csökkenő**, ha  $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} \leq a_n$ .
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **szigorúan monoton növekvő**, ha  $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} > a_n$ .
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **szigorúan monoton csökkenő**, ha  $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} < a_n$ .



## 2. SOROZATOK

### 2.1 Sorozatok korlátossága, monotonitása, konvergenciája

#### Konvergens valós számsorozat

Az  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozatot **konvergensnek** nevezzük, ha van olyan  $a \in \mathbb{R}$ , hogy bármely  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan  $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$  szám, hogy

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{amennyiben} \quad n > N(\varepsilon).$$

Az  $a$  számot a sorozat **határértékének** (limeszének) nevezzük.

Jelölés:  $a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$ , vagy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Az  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozatot **divergensnek** nevezünk, ha nem konvergens.

#### A konvergencia környezetes átfogalmazása

*Az  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat konvergens és határértéke  $a \in \mathbb{R}$  akkor és csak akkor, ha az  $a$  pont bármely környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van.*

## 2. SOROZATOK

### 2.1 Sorozatok korlátossága, monotonitása, konvergenciája

*Ha egy sorozatban*

- *véges sok elemet teszőlegesen megváltoztatunk,*
- *vagy a sorozatból véges sok elemet elhagyunk,*
- *vagy a sorozathoz véges sok elemet hozzáveszünk,*

*akkor a sorozat konvergenciája vagy divergenciája nem változik, és konvergencia esetén a határértéke sem változik.*

#### A határérték egyértelműsége

*Konvergens sorozatnak pontosan egy határértéke van.*

#### A konvergencia és a korlátosság kapcsolata

- *Konvergens sorozat korlátos.*
- *Van olyan korlátos sorozat, mely divergens (nem konvergens).*

## 2. SOROZATOK

### 2.1 Sorozatok korlátossága, monotonitása, konvergenciája

$\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  a sorozat elemeiből álló halmaz  
(azaz a sorozat mint függvény értékkészlete)

#### A konvergencia és a monotonitás kapcsolata

- Ha az  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .
- Ha az  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

## 2. SOROZATOK

### 2.2 Műveletek, rendezés és konvergencia kapcsolata

#### A konvergencia és a műveletek kapcsolata

Ha  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  ( $n \rightarrow \infty$ ), akkor

$$a_n + b_n \rightarrow a + b \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$a_n b_n \rightarrow ab \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{ha } b_n, b \neq 0,$$

$$ca_n \rightarrow ca \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$|a_n| \rightarrow |a| \quad (n \rightarrow \infty).$$

## 2. SOROZATOK

### 2.2 Műveletek, rendezés és konvergencia kapcsolata

#### Előjel=signum függvény

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ -1 & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

#### A konvergencia és a rendezés kapcsolata

- Konvergens sorozat **jeltartó**, azaz ha  $a_n \rightarrow a \neq 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), akkor van olyan  $n_0 \in \mathbb{N}$ , hogy  $\text{sign}(a_n) = \text{sign}(a)$  ha  $n > n_0$ .
- A konvergencia **megőrzi a monotonitást**, azaz ha  $a_n \leq b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) és  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  ( $n \rightarrow \infty$ ), akkor  $a \leq b$ .
- Érvényes a **rendőrtétel**, azaz ha  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ) és  $a_n \leq x_n \leq b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), akkor  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is konvergens és  $x_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

## 2. SOROZATOK

### 2.3 Bővített valós számok, végtelenhez tartó sorozatok

#### Bővített valós számok halmaza

$$\mathbb{R}_b := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \quad \text{Jelölés: } \infty := +\infty$$

#### Műveletek $\mathbb{R}_b$ -ben

Bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén

$$\begin{aligned}x + (\pm\infty) &:= (\pm\infty) + x = \pm\infty, \\(+\infty) + (+\infty) &:= +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) := -\infty, \\x \cdot (\pm\infty) &:= (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty \quad \text{ha } x > 0, \\x \cdot (\pm\infty) &:= (\pm\infty) \cdot x = \mp\infty \quad \text{ha } x < 0, \\(+\infty) \cdot (\pm\infty) &:= \pm\infty, \quad (-\infty) \cdot (\pm\infty) := \mp\infty, \\ \frac{x}{\pm\infty} &:= 0.\end{aligned}$$

#### Rendezés $\mathbb{R}_b$ -ben

Bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén  $-\infty < x < +\infty$ .

## 2. SOROZATOK

### 2.3 Bővített valós számok, végtelenhez tartó sorozatok

**NINCSENEK ÉRTELMEZVE AZ ALÁBBIK:**

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad (\pm\infty) \cdot 0,$$

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \quad \frac{-\infty}{+\infty}, \quad \frac{-\infty}{-\infty}, \quad \frac{x}{0} \quad \text{ha } x \in \mathbb{R}_b.$$

## 2. SOROZATOK

### 2.3 Bővített valós számok, végtelenhez tartó sorozatok

#### A határérték fogalmának kiterjesztése

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat **határértéke**  $+\infty$ , ha bármely  $K \in \mathbb{R}$  számhoz van olyan  $N(K) \in \mathbb{R}$ , hogy

$$a_n > K \quad \text{ha } n > N(K).$$

Jelölés:  $a_n \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) vagy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat **határértéke**  $-\infty$ , ha bármely  $K \in \mathbb{R}$  számhoz van olyan  $N(K) \in \mathbb{R}$ , hogy

$$a_n < K \quad \text{ha } n > N(K).$$

Jelölés:  $a_n \rightarrow -\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) vagy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

Ha  $a_n \rightarrow +\infty$  vagy  $a_n \rightarrow -\infty$ , akkor a sorozat **divergens**, de **van határértéke!**



## 2. SOROZATOK

### 2.3 Bővített valós számok, végtelenhez tartó sorozatok

#### Környezetek $\mathbb{R}_b$ -ben

$+\infty$  környezetei a  $]K, +\infty[$  ( $K \in \mathbb{R}$ ) intervallumok,

$-\infty$  környezetei a  $] -\infty, K[$  ( $K \in \mathbb{R}$ ) intervallumok

#### A határérték környezetes átfogalmazása $\mathbb{R}_b$ -ben

*Egy sorozat határértéke  $+\infty$  (illetve  $-\infty$ ) akkor és csakis akkor, ha  $+\infty$  (illetve  $-\infty$ ) bármely környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van.*

#### Pontos felső korlát $\mathbb{R}_b$ -ben

Ha  $A \subset \mathbb{R}$  felülről nem korlátos, akkor  $\sup A := +\infty$ .

Ha  $A \subset \mathbb{R}$  alulól nem korlátos, akkor  $\inf A := -\infty$ .

*Minden  $A \subset \mathbb{R}$  halmaznak van szuprémuma és infimuma  $\mathbb{R}_b$ -ben.*

*Minden monoton sorozatnak van határértéke  $\mathbb{R}_b$ -ben.*

## 2. SOROZATOK

### 2.3 Bővített valós számok, végtelenhez tartó sorozatok

#### A határérték és műveletek kapcsolata $\mathbb{R}_b$ -ben

Ha  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  ( $n \rightarrow \infty$ ), ahol most  $a, b \in \mathbb{R}_b$ , és  $c \in \mathbb{R}$ , akkor

$$a_n + b_n \rightarrow a + b \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{ha } a + b \text{ értelmezve van,}$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{ha } a \cdot b \text{ értelmezve van,}$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{ha } b_n \neq 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\text{és } \frac{a}{b} \text{ értelmezve van,}$$

$$c \cdot a_n \rightarrow c \cdot a \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{ha } c \cdot a \text{ értelmezve van,}$$

továbbá ha  $|a_n| \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ), akkor  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

## 2. SOROZATOK

### 2.4 Nevezetes határértékek

$$\bullet n^a \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{ha } a > 0, \\ 1 & \text{ha } a = 0, \\ 0 & \text{ha } a < 0. \end{cases} \quad a^n \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{ha } |a| < 1, \\ 1 & \text{ha } a = 1, \\ +\infty & \text{ha } a > 1, \\ \text{divergens} & \text{ha } a \leq -1. \end{cases}$$

- Ha  $a > 0$ , akkor  $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ).
- Ha  $|a| < 1$  és  $k \in \mathbb{R}$ , akkor  $n^k a^n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).
- $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ).
- Ha  $a \in \mathbb{R}$ , akkor  $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).
- Az  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos,  $a_n < 3$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), így konvergens. Határértéke egy nevezetes szám, amit  $e$ -vel jelölünk, közelítő értéke  $e \approx 2,72$ .

### 3. SOROK

#### 3.1 Definíció, konvergencia, divergencia, összeg

##### Számsor

Egy  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  valós számsorozat elemeit az összeadás jelével összekapcsolva kapott

$$a_1 + a_2 + \cdots \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \left( \text{röviden } \sum a_n \right)$$

összeget **számsornak** (vagy numerikus sornak) nevezzük.

A  $\sum a_n$  sort **konvergensnek** nevezzük, ha **részletösszegeinek**

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

**sorozata konvergens**, és ekkor a **sor összege**  $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , és azt

írjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s, \quad \text{azaz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

A  $\sum a_n$  sort **divergensnek** nevezzük, ha nem konvergens.

### 3. SOROK

#### 3.1 Definíció, konvergencia, divergencia, összeg

- A  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots$ , ( $a, q \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ) **geometriai sor** akkor és csakis akkor konvergens, ha  $|q| < 1$ , és akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q} = \frac{\text{első tag}}{1 - \text{kvóciens}}.$$

- A  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  **harmónikus sor** divergens.

#### Sor konvergenciájának szükséges feltétele

Ha a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor konvergens, akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

### 3. SOROK

#### 3.1 Definíció, konvergencia, divergencia, összeg

#### Leibniz tétele

(elegendő feltétel alternáló sorok konvergenciájára)

A  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  ( $a_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) **alternáló sor** konvergens, ha  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton csökkenően tart nullához, és ekkor a sor  $s$  összegére, és részletösszegeinek  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozatára teljesül

$$|s - s_n| \leq a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Például a  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  alternáló sor konvergens (és összege  $\ln 2$ ).

## 3. SOROK

### 3.2 Pozitív tagú sorok

A  $\sum a_n$  sort akkor nevezzük pozitív tagúnak, ha  $a_n > 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

*Pozitív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha a részletösszegeiből álló sorozat felülről korlátos.*

#### Majoráns/minoráns teszt

Legyenek  $0 < a_n \leq b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

- Ha a  $\sum b_n$  sor konvergens, akkor a  $\sum a_n$  sor is konvergens.
- Ha a  $\sum a_n$  sor divergens, akkor a  $\sum b_n$  sor is divergens.

### 3. SOROK

#### 3.2 Pozitív tagú sorok

#### Hányados/D'Alambert teszt

Legyen  $\sum a_n$  pozitív tagú sor.

- Ha  $(\exists q < 1) (\forall n \in \mathbb{N}) \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ , akkor a  $\sum a_n$  sor konvergens.
- Ha  $(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , akkor a  $\sum a_n$  sor divergens.

#### Hányados/D'Alambert teszt limeszes alakja

Legyen  $\sum a_n$  pozitív tagú sor, és tegyük fel, hogy

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}_b.$$

- Ha  $L < 1$ , akkor a  $\sum a_n$  sor konvergens.
- Ha  $L > 1$ , akkor a  $\sum a_n$  sor divergens.
- Ha  $L = 1$ , akkor a  $\sum a_n$  sor lehet konvergens, és lehet divergens is.



### 3. SOROK

#### 3.2 Pozitív tagú sorok

##### Gyök/Cauchy teszt

Legyenek  $a_n \geq 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

- Ha  $(\exists q < 1) (\forall n \in \mathbb{N}) \sqrt[n]{a_n} \leq q$ , akkor a  $\sum a_n$  sor konvergens.
- Ha  $(\forall n \in \mathbb{N}) \sqrt[n]{a_n} \geq 1$ , akkor a  $\sum a_n$  sor divergens.

##### Gyök/Cauchy teszt limeszes alakja

Legyenek  $a_n \geq 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), és tegyük fel, hogy

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R}_b.$$

- Ha  $L < 1$ , akkor a  $\sum a_n$  sor konvergens.
- Ha  $L > 1$ , akkor a  $\sum a_n$  sor divergens.
- Ha  $L = 1$ , akkor a  $\sum a_n$  sor lehet konvergens, és lehet divergens is.

### 3. SOROK

#### 3.3 Abszolút konvergencia, műveletek sorokkal

- A  $\sum a_n$  sort **abszolút konvergensnek** nevezzük, ha a  $\sum |a_n|$  sor konvergens.
- A  $\sum a_n$  sort **feltételesen konvergensnek** nevezzük, ha a sor konvergens, de nem abszolút konvergens.

*Abszolút konvergens sor konvergens, de konvergens sor lehet nem abszolút konvergens.*

#### Sor átrendezése

Ha  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektív, akkor a  $\sum a_{\varphi(n)}$  sort a  $\sum a_n$  sor **átrendezésének** nevezzük.

- *Abszolút konvergens sor bármely átrendezése is konvergens, és az átrendezett sor összege megegyezik az eredeti sor összegével.*
- *Feltételesen konvergens sornak van olyan átrendezése, mely divergens, vagy melynek összege egy tetszőlegesen előírt szám.*

### 3. SOROK

#### 3.3 Abszolút konvergencia, műveletek sorokkal

- *Konvergens sor tetszőlegesen zárójelezhető, és a zárójelezett sor összege megegyezik az eredeti sor összegével.*
- *Ha  $\sum a_n$  és  $\sum b_n$  konvergensek és  $c \in \mathbb{R}$ , akkor  $\sum(a_n + b_n)$  és  $\sum(c \cdot a_n)$  is konvergensek, és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

A  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  és  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  sorok **Cauchy-féle szorzatsora**  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ , ahol

$$c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

*Abszolút konvergens sorok Cauchy-féle szorzatsora is abszolút konvergens, és összege a tényezősorok összegének szorzata.*

### 3. SOROK

#### 3.4 Hatványsorok

Egy  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  számsorozat és  $a \in \mathbb{R}$  esetén a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$  összeget **hatványsornak** nevezzük, melynek **konvergenciahalmazát** azon  $x \in \mathbb{R}$  pontok alkotják, melyekre a sor konvergens. A konvergenciahalmaz pontjaiban értelmezhető a sor **összegfüggvénye** (mint a részletösszegek határértéke).

Tegyük fel, hogy a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$  hatványsor esetén  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_b$ .

Az  $r := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in \mathbb{R}_b$  (ahol  $\frac{1}{0} := +\infty$ ,  $\frac{1}{+\infty} := 0$ ) bővített valós számot a hatványsor **konvergenciasugarának** nevezzük.

- Ha  $|x - a| < r$ , akkor a hatványsor abszolút konvergens  $x$ -ben.
- Ha  $|x - a| > r$ , akkor a hatványsor divergens  $x$ -ben.

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.1 Függvény határértéke

A torlódási pont fogalmát már korábban bevezettük. Ezt most kiterjesztjük arra az esetre amikor a torlódási pont  $\mathbb{R}_b$ -beli. Azt mondjuk, hogy  $+\infty$  ( $-\infty$ ) torlódási pontja a  $D$  halmaznak, ha  $D$  nem korlátos felülről (alulról). Egy  $D \subset \mathbb{R}$  halmaz  $\mathbb{R}_b$ -beli torlódási pontjainak halmazát  $D'$ -vel fogjuk jelölni.

#### Függvény határértéke

Legyen  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és legyen  $x_0 \in D'$ . Azt mondjuk, hogy  **$f$ -nek van (véges, vagy végtelen) határértéke az  $x_0$  pontban**, ha van olyan  $a \in \mathbb{R}_b$  bővített valós szám, hogy bármely olyan  $D$ -beli  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozatra, melyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  és  $x_n \neq x_0$ , teljesül a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$  egyenlőség.

$a$ -t az  $f$  függvény  $x_0$  pontbeli határértékének nevezzük, és  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ -val, vagy  $f(x) \rightarrow a$  ( $x \rightarrow x_0$ )-al jelöljük.

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.1 Függvény határértéke

#### Átfogalmazás

Másképpen megfogalmazva: az  $f$  függvény értelmezési tartományának egy  $x_0 \in \mathbb{R}_b$  torlódási pontjában akkor és csakis akkor lesz  $f$  határértéke az  $a \in \mathbb{R}_b$  bővített valós szám, ha az értelmezési tartományból bármely  $x_0$ -hoz konvergáló  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozatot véve, melynek elemei  $x_0$ -tól különbözőek, a függvényértékek  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  sorozata  $a$ -hoz tart.

#### Határérték egyértelműsége

*Függvény határértéke, ha létezik, akkor egyértelmű.*

Határérték **létezhet az  $x_0$  pontban akkor is, ha a függvény nincs értelmezve a pontban**, de torlódási pontja annak (egy halmaz torlódási pontja ugyanis nem feltétlenül pontja a halmaznak).

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.1 Függvény határértéke

Legyen  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és legyen  $E \subset D$ , akkor az  $f$  **függvény  $E$ -re való leszűkítését**  $f|_E$ -vel jelöljük. Ez a függvény csak az  $E$  halmazon van definiálva és ott megegyezik  $f$ -fel.

#### Jobb- és baloldali határérték $x_0 \in \mathbb{R}_b$ -ben

Legyen  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és legyen  $x_0 \in \mathbb{R}_b$  a  $D_{x_0}^+ := D \cap [x_0, +\infty[$  ( $D_{x_0}^- := D \cap ]-\infty, x_0]$ ) halmaz torlódási pontja. Akkor mondjuk, hogy az  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $a \in \mathbb{R}_b$  bővített valós szám **jobboldali (baloldali) határértéke** az  $x_0$  pontban, ha  $a \in \mathbb{R}_b$  az  $x_0$  pontbeli határértéke az  $f|_{D_{x_0}^+}$  ( $f|_{D_{x_0}^-}$ ) leszűkített függvénynek.

Jobboldali (baloldali) határérték jelölése:  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a$

(  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = a$  )

Világos, hogy  $+\infty$ -ben csak baloldali,  $-\infty$ -ben csak jobboldali határérték definiálható.

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.1 Függvény határértéke

Függvény határértékére a fentivel ekvivalens definíció adható, de ekkor a véges és végtelenben vett véges és végtelen határértékek definíciója kissé eltérő.

#### Függvény véges határértéke véges pontban, $\varepsilon, \delta$ -s definíció

Legyen  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és legyen  $x_0 \in D'$  véges torlódási pontja  $D$ -nek. Azt mondjuk, hogy  **$f$ -nek van (véges) határértéke az  $x_0$  pontban**, ha van olyan  $a \in \mathbb{R}$  szám, hogy minden  $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan  $\delta(\varepsilon) > 0$ , hogy

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \text{és} \quad x \in D.$$



## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.1 Függvény határértéke

#### Határérték, monotonitás és műveletek kapcsolata

Legyenek  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D'$ , és tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}_b, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}_b.$$

Akkor bármely  $c \in \mathbb{R}$  mellett

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b, \quad \text{ha } a + b \text{ értelmezve van,}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot a, \quad \text{ha } c \cdot a \text{ értelmezve van,}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b, \quad \text{ha } a \cdot b \text{ értelmezve van,}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, \quad \text{ha } \frac{a}{b} \text{ értelmezve van.}$$

Ha  $f(x) \leq g(x)$  ( $x \in D$ ,  $x \neq x_0$ ), akkor  $a \leq b$ .

Ha  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  ( $x \in D$ ,  $x \neq x_0$ ), és  $a = b$ , akkor  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ .

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.1 Függvény határértéke

#### Összetett függvény

A  $h(x) := g(f(x))$  ( $x \in D$ ) függvényt, ahol  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ , az  $f$  és  $g$  **függvényekből összetett függvénynek nevezzük**,  $f$  a belső,  $g$  a külső függvény. (Itt  $f(D) := \{f(x) : x \in D\}$  az  $f$  függvény értékkészlete.) Más jelölés:  $h = g \circ f$ .

#### Összetett függvény határértéke

Legyen  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ , és  $h(x) := g(f(x))$  ( $x \in D$ ).  
Ha  $x_0 \in D'$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad a \notin f(D \setminus \{x_0\}), \quad \text{és} \quad \lim_{y \rightarrow a} g(y) = b,$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = b.$$

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.2 Függvény folytonossága

#### Függvény folytonossága

Az  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt **folytonosnak** nevezzük az  $x_0 \in D$  pontban, ha bármely  $D$ -beli  $x_0$ -hoz konvergáló  $x_n \in D$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) sorozat esetén a függvényértékek  $f(x_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sorozata az  $x_0$  pontbeli függvényértékhez tart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Röviden: az  $f$  függvény  $x_0 \in D$  pontbeli folytonossága azt jelenti, hogy ha  $D \ni x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x_0)$ .

- Ha  $x_0 \in D \cap D'$ , akkor  $f$  folytonos  $x_0$ -ban akkor, és csakis akkor, ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
- Ha  $x_0 \in D$ , de  $x_0 \notin D'$ , akkor  $x_0$  a  $D$  **izolált pontja**, izolált pontokban  $f$  a definíció alapján mindig folytonos.

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.2 Függvény folytonossága

#### Jobb- és baloldali folytonosság

Az  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt jobbról (balról) **folytonosnak** nevezzük az  $x_0 \in D$  pontban, ha az  $f|_{D_{x_0}^+}$  ( $f|_{D_{x_0}^-}$ ) leszűkített függvény folytonos az  $x_0 \in D$  pontban.

Ez azt jelenti, hogy az  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény pontosan akkor jobbról (balról) **folytonos** az  $x_0 \in D$  pontban, ha bármely  $D$ -beli  $x_0$ -hoz konvergáló  $x_n \in D$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $x_n \geq x_0$  ( $x_n \leq x_0$ ),  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) sorozat esetén a függvényértékek  $f(x_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sorozata az  $x_0$  pontbeli függvényértékhez tart,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ .

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.2 Függvény folytonossága

#### Függvény folytonossága, $\varepsilon$ , $\delta$ -s ekvivalens definíció

Az  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt az  $x_0 \in D$  pontban **folytonosnak** nevezzük, ha bármely  $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan  $\delta(\varepsilon) > 0$ , hogy

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \text{és} \quad x \in D.$$

#### Függvény folytonossága és a műveletek kapcsolata

- Ha  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosak az  $x_0 \in D$  pontban és  $c \in \mathbb{R}$ , akkor  $f + g$ ,  $c \cdot f$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  (ha  $g(x_0) \neq 0$ ) is folytonosak  $x_0$ -ban.
- A  $h(x) = g(f(x))$  ( $x \in D$ ) összetett függvény folytonos  $x_0$ -ban (ahol  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ ), ha  $f$  folytonos  $x_0$ -ban és  $g$  folytonos az  $y_0 := f(x_0)$  pontban.

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.3 Folytonos függvények globális tulajdonságai

Azt mondjuk, hogy az  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény a  $D$  halmazon

- **alulról (felülről) korlátos**, ha értékkészlete alulról (felülről) korlátos.
- **monoton növekvő (csökkenő)**, ha

$$\forall x_1 < x_2, x_1, x_2 \in D \text{ esetén } f(x_1) \leq f(x_2) \text{ (} f(x_1) \geq f(x_2) \text{)}).$$

- **szigorúan monoton növekvő (csökkenő)**, ha

$$\forall x_1 < x_2, x_1, x_2 \in D \text{ esetén } f(x_1) < f(x_2) \text{ (} f(x_1) > f(x_2) \text{)}).$$

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.3 Folytonos függvények globális tulajdonságai

Azt mondjuk, hogy az  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $x_0 \in D$  pontban

- **lokális/helyi maximuma (minimuma)** van, ha  $\exists \varepsilon > 0$ , hogy

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \quad \forall x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D \text{ esetén.}$$

- **szigorú lokális/helyi maximuma (minimuma)** van, ha  $\exists \varepsilon > 0$ , hogy

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \quad \forall x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D, x \neq x_0 \text{ esetén.}$$

- **globális/abszolút maximuma (minimuma)** van, ha

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \quad \forall x \in D \text{ esetén.}$$

- **szigorú globális/abszolút maximuma (minimuma)** van, ha

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \quad \forall x \in D, x \neq x_0 \text{ esetén.}$$

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.3 Folytonos függvények globális tulajdonságai

Folytonos függvény **jeltartó**, azaz ha  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos az  $x_0 \in D$  pontban, és  $f(x_0) \neq 0$ , akkor van olyan  $\delta > 0$ , hogy

$$\text{sign}(f(x)) = \text{sign}(f(x_0)) \quad \text{ha } x \in K(x_0, \delta) \cap D.$$

### Függvény folytonossága halmazon

Azt mondjuk, hogy az  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény **folytonos az  $A \subset D$  halmazon**, ha  $f$  az  $A$  halmaz minden pontjában folytonos.

### Folytonos függvény korlátossága

*Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.*

### Maximum, minimum létezése

*Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a függvényértékek szuprémumát és infimumát függvényértékként.*



## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.3 Folytonos függvények globális tulajdonságai

#### Függvény egyenletes folytonossága halmazon

Azt mondjuk, hogy az  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény **egyenletesen folytonos a  $D_1 \subset D$  halmazon**, ha bármely  $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan (csak  $\varepsilon$ -tól függő)  $\delta(\varepsilon) > 0$ , amelyre

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad |x - y| < \delta(\varepsilon) \quad \text{és} \quad x, y \in D_1.$$

Ha  $f$  csupán folytonos  $D_1$ -en, akkor bármely  $\varepsilon > 0$ -hoz és bármely  $y \in D_1$ -hez van olyan ( $y$ -tól is függő)  $\delta(\varepsilon, y) > 0$ , amelyre

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad |x - y| < \delta(\varepsilon, y) \quad \text{és} \quad x \in D_1.$$

#### Cantor tétele

*Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény ott egyenletesen folytonos.*

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.3 Folytonos függvények globális tulajdonságai

#### Közbenső értékek tétele

*Egy intervallumon folytonos függvény felvesz bármely két függvényérték közötti értéket is függvényértékként.*

Azaz egy intervallumon folytonos függvény **értékkészlete is egy intervallum.**

#### Inverz függvény folytonossága

*Egy intervallumon folytonos, szigorúan monoton függvény injektív, és inverze is folytonos, és szigorúan monoton (ugyanolyan értelemben mint az eredeti függvény).*

#### Inverz függvény folytonossága

*Egy intervallumon folytonos és injektív függvény inverze is folytonos.*

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.4 Az elemi függvények folytonossága

- $x \mapsto \ln x :=$  az  $x \mapsto e^x$  függvény inverze,  $\ln : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- $a^x := e^{x \ln a}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), ahol  $a > 0$ ,
- $x \mapsto \log_a x :=$  az  $x \mapsto a^x$  függvény inverze, ahol  $0 < a \neq 1$ ,  $\log_a : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] :=$  a  $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$  függvény inverze,
- $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] :=$  a  $\cos|_{[0, \pi]}$  függvény inverze,
- $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ :=$  a  $\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$  függvény inverze,
- $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow ]0, \pi[ :=$  a  $\operatorname{ctg}|_{]0, \pi[}$  függvény inverze.

# 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

## 4.4 Az elemi függvények folytonossága

### Elemi függvények

Az

- $f(x) = c$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) (ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges konstans),
- $f(x) = x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ),
- $f(x) = e^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ),
- $f(x) = \ln x$  ( $x > 0$ ),
- $f(x) = \sin x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ),
- $f(x) = \arcsin x$  ( $x \in [-1, 1]$ )

függvényeket, és ezekből a

- 4 alapl művelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás),
- összetett függvény képzése,
- leszűkítés egy intervallumra

operációk véges sokszori alkalmazásával keletkező függvényeket **elemi függvényeknek** nevezzük.

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.4 Az elemi függvények folytonossága

#### Elemi függvények

- Az
  - $f(x) = x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$  ( $x > 0$ ), *általános hatványfüggvény,*
  - *a trigonometrikus függvények és inverzeik,*
  - *a polinomok,*
  - *racióális törtfüggvények (azaz polinomok hányadosai)**elemi függvények.*
- *Az elemi függvények folytonosak.*

## 4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

### 4.5 Nevezetes függvényhatárértékek

#### Nevezetes függvényhatárértékek

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

## 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

### 5.1 Differenciálhatóság, differenciálási szabályok

#### Differenciálhatóság, differenciálhányados/derivált

Az  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subset \mathbb{R}$  egy nem elfajult intervallum) függvényt **differenciálhatónak** nevezük az  $x_0 \in I$  pontban, ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

E határértéket az  $f$  függvény  $x_0$  pontbeli **differenciálhányadosának** vagy **deriváltjának** nevezük.

Jelölés:  $f'(x_0)$  vagy  $\frac{df}{dx}(x_0)$ .

Minden olyan  $x \in I$  pontban, ahol  $f$  differenciálható, értelmezhetjük az  $x \mapsto f'(x)$  **derivált függvényt**.

# 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

## 5.1 Differenciálhatóság, differenciálási szabályok

### A derivált jelentése:

- $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  az  $[x_0, x]$  intervallumon vett **differenciahányados**, ami a függvény változásának **átlagsebessége**;
- $f'(x_0)$  az átlagsebesség határértéke, amikor az  $[x_0, x]$  intervallum összehúzódik az  $x_0$  pontra, azaz  $f'(x_0)$  a függvény változásának  $x_0$  pontbeli **pillanatnyi sebessége**.

### A derivált geometriai jelentése:

- $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  az  $f$  függvény görbéjének  $(x_0, f(x_0))$  és  $(x, f(x))$  pontjait összekötő *szelőjének iránytangense*;
- $f'(x_0)$  az  $f$  függvény görbéjéhez az  $(x_0, f(x_0))$  pontban húzott **érintő iránytangense**.

*Ha  $f$  differenciálható egy pontban, akkor ott folytonos is.*



## 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

### 5.1 Differenciálhatóság, differenciálási szabályok

#### Differenciálás és a műveletek kapcsolata

Ha  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálhatók az  $x_0 \in I$  pontban, akkor

- $f + g$  is differenciálható  $x_0$ -ban, és

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

- tetszőleges  $c \in \mathbb{R}$  esetén  $c \cdot f$  is differenciálható  $x_0$ -ban, és

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0),$$

- $f \cdot g$  is differenciálható  $x_0$ -ban, és

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0),$$

- ha  $g(x_0) \neq 0$ , akkor  $\frac{f}{g}$  is differenciálható  $x_0$ -ban, és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

## 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

### 5.1 Differenciálhatóság, differenciálási szabályok

#### Differenciálhatóság és lineáris approximálhatóság kapcsolata

- Az  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény akkor és csak akkor differenciálható az  $x_0 \in I$  pontban, ha van olyan  $A \in \mathbb{R}$  konstans, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Ha ez teljesül, akkor  $A = f'(x_0)$ .

- Az  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény akkor és csak akkor differenciálható az  $x_0 \in I$  pontban, ha van olyan  $A \in \mathbb{R}$  konstans és  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, hogy

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Ekkor  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , azaz, az  $x \mapsto f(x)$  függvény az  $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  lineáris függvénnyel approximálható

## 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

### 5.1 Differenciálhatóság, differenciálási szabályok

#### Összetett függvény differenciálhatósága

Legyen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J := f(I)$  az  $f$  értékkészlete,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ha  $f$  differenciálható az  $x_0 \in I$  pontban és  $g$  differenciálható az  $y_0 := f(x_0) \in J$  pontban, akkor a  $h := g \circ f$  összetett függvény differenciálható az  $x_0$  pontban, és

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

#### Inverz függvény differenciálhatósága

Tegyük fel, hogy  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  invertálható, folytonos  $I$ -n, differenciálható az  $x_0 \in I$  pontban, és  $f'(x_0) \neq 0$ . Akkor az  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  inverz függvény differenciálható az  $y_0 := f(x_0)$  pontban, és

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

## 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

### 5.2 Az elemi függvények deriváltjai

$$(c)' = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges konstans}),$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0, \text{ ha } \alpha \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}, \text{ ha } \alpha \in \mathbb{N}),$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}),$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}),$$

$$(e^x)' = e^x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (x \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1),$$

## 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

### 5.2 Az elemi függvények deriváltjai

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0),$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (x > 0, 0 < a \neq 1),$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1),$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1),$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

*Az elemi függvények értelmezési tartományuk belső pontjaiban differenciálhatók.*

## 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

### 5.3 Középértéktételek és alkalmazásai

#### Lokális szélsőérték szükséges feltétele

Ha  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható az  $x_0 \in I^\circ$  belső pontban ( $I^\circ$  jelöli az  $I$  intervallum belső pontjainak halmazát, vagyis belsejét), és  $f$ -nek  $x_0$ -ban lokális szélsőértéke van, akkor

$$f'(x_0) = 0.$$

#### Rolle-féle középértéktétel

Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos  $[a, b]$ -n, differenciálható  $]a, b[$ -n,  $f(a) = f(b)$ , akkor van olyan  $\xi \in ]a, b[$ , melyre

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

## 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

### 5.3 Középértéktételek és alkalmazásaik

#### Lagrange-féle középértéktétel

Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos  $[a, b]$ -n, differenciálható  $]a, b[$ -n, akkor van olyan  $\xi \in ]a, b[$ , melyre

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

#### Cauchy-féle középértéktétel

Legyenek  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosak  $[a, b]$ -n, differenciálhatók  $]a, b[$ -n, akkor van olyan  $\xi \in ]a, b[$ , melyre

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi),$$

vagy, ha  $g'(x) \neq 0$  ( $x \in ]a, b[$ ), akkor

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

#### Monotonitás és deriváltak kapcsolata

Legyen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható  $I$ -n.

- $f$  monoton növekvő  $I$ -n akkor és csak akkor, ha  $f'(x) \geq 0$  ( $x \in I$ ).
- $f$  monoton csökkenő  $I$ -n akkor és csak akkor, ha  $f'(x) \leq 0$  ( $x \in I$ ).
- $f$  konstans  $I$ -n akkor és csak akkor, ha  $f'(x) = 0$  ( $x \in I$ ).
- $f$  szigorúan monoton növekvő  $I$ -n ha  $f'(x) > 0$  ( $x \in I$ ).
- $f$  szigorúan monoton csökkenő  $I$ -n ha  $f'(x) < 0$  ( $x \in I$ ).



# 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

## 5.3 Középértéktételek és alkalmazásaik

### L'Hospital szabály

Legyenek  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálhatók  $]a, b[$ -n (ahol most  $a, b \in \mathbb{R}_b$ ), és  $g'(x) \neq 0$  ( $x \in ]a, b[$ ). Ha

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}_b$$

és

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0 \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = +\infty(-\infty),$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

A tétel akkor is érvényes, ha  $x \rightarrow a+0$  helyére mindenütt  $x \rightarrow b-0$ , illetve  $x \rightarrow c$  kerül, ahol  $c$  az  $]a, b[$  egy belső pontja.

## 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

### 5.4 Magasabbrendű deriváltak, konvexitás, konkávitás

#### Magasabbrendű deriváltak

Tegyük fel, hogy az  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény első deriváltja létezik az  $x_0 \in I$  pontnak egy (legalább egyoldali) környezetében, akkor  $f$  **második deriváltja**

$$f''(x_0) := (f')'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Hasonlóan, az  $f$  függvény  $(n + 1)$ -**edik deriváltja**

$$f^{(n+1)}(x_0) := (f^{(n)})'(x_0).$$

## 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

### 5.4 Magasabbrendű deriváltak, konvexitás, konkávitás

#### Konvexitás, konkávitás

Az  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt **konvexnek** nevezzük az  $I$  intervallumon, ha

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in I, \lambda \in [0, 1]).$$

Az  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt **konkávnak** nevezzük  $I$ -n, ha  $-f$  konvex  $I$ -n.

**Konvexitás geometriai jelentése:**  $x_1 < x_2$  esetén a  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  pont az  $[x_1, x_2]$  intervallumot  $1 - \lambda : \lambda$  arányban osztja ketté.

Az  $(x_1, f(x_1))$  és  $(x_2, f(x_2))$  pontokon átmenő egyenes (szelő) egyenlete:

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Ennek értéke a  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  pontban éppen  $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ . Így az  $f$  függvény akkor és csakis akkor konvex az  $I$  intervallumon, ha a függvény görbéjének bármely szelője a metszési pontok közötti szakaszon a függvény görbe felett van.

### Konvex és konkáv függvények jellemzése

- 1 Ha  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható  $I$ -n, akkor
  - $f$  konvex  $I$ -n akkor és csak akkor, ha  $f'$  monoton növekvő  $I$ -n;
  - $f$  konkáv  $I$ -n akkor és csak akkor, ha  $f'$  monoton csökkenő  $I$ -n.
- 2 Ha  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  kétszer differenciálható  $I$ -n, akkor
  - $f$  konvex  $I$ -n akkor és csak akkor, ha  $f''(x) \geq 0$  ( $x \in I$ );
  - $f$  konkáv  $I$ -n akkor és csak akkor, ha  $f''(x) \leq 0$  ( $x \in I$ ).

## 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

### 5.4 Magasabbrendű deriváltak, konvexitás, konkávitás

#### Inflexiós hely, inflexiós pont

Legyen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  és  $x_0 \in I^\circ$  belső pontja  $I$ -nek. Az  $x_0$  pontot az  $f$  függvény **inflexiós helyének**, az  $(x_0, f(x_0))$  pontot **inflexiós pontjának** nevezzük, ha  $x_0$  az  $I$  intervallum konvex és konkáv szakaszait választja el, azaz, ha van olyan  $\delta > 0$ , hogy

- $f$  konvex az  $]x_0 - \delta, x_0[$ , konkáv az  $]x_0, x_0 + \delta[$  intervallumon, vagy
- $f$  konkáv az  $]x_0 - \delta, x_0[$ , konvex az  $]x_0, x_0 + \delta[$  intervallumon.

#### Inflexiós pontok megkeresése

Legyen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  kétszer differenciálható  $I$ -n.

- Ha az  $x_0 \in I^\circ$  pont inflexiós helye  $f$ -nek, akkor  $f''(x_0) = 0$ .
- Ha  $f''(x_0) = 0$  és  $f''$  előjelet vált  $x_0$ -ban, akkor  $x_0$  inflexiós helye  $f$ -nek.

### Taylor tétele

Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , és tegyük fel, hogy  $\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , hogy

- az  $f$  függvény  $(n+1)$ -szer differenciálható  $]a, b[$ -n,
- $f^{(n)}$  folytonos  $[a, b]$ -n.

Akkor bármely  $x, x_0 \in [a, b]$ -hoz van olyan  $\xi$  az  $x$  és  $x_0$  között (szigorúan közöttük, ha  $x \neq x_0$ ), hogy

$$f(x) = \left( f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \right. \\ \left. + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

ahol  $f^{(0)} := f$ .

# 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

## 5.5 Taylor tétele

$$T_n(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

az  $f$  függvény  $x_0$  pont körüli  $n$ -edfokú **Taylor polinomja** ( $x_0 = 0$  esetén **Mc Laurin polinomja**),

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

a Taylor formula  $n$ -**edik maradéktagja** Lagrange-féle alakban. Az  $R_n(x)$  maradéktag azt mutatja meg, hogy  $f(x)$ -et a  $T_n(x)$  Taylor polinom milyen hibával közelíti.

### Példák Taylor polinomra:

1  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$  mellett

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

ahol

$$R_n(x) := \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1},$$

és  $\xi$  az  $x$  és  $x_0 = 0$  között van. Ebből azt kapjuk, hogy

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ezt a sort az **exponenciális függvény Mc Laurin sorának**, vagy  $x_0 = 0$  **körüli Taylor sorának** nevezzük.



## 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

### 5.5 Taylor tétele

2  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$  esetén

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol

$$R_{2n+1}(x) := \frac{\sin\left(\xi + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2},$$

és  $\xi$  az  $x$  és  $x_0 = 0$  között van. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ezt a sort a **sin függvény Mc Laurin sorának, vagy  $x_0 = 0$  körüli Taylor sorának** nevezük.

# 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

## 5.6 Szélsőértékszámítás

### Lokális szélsőérték szükséges feltétele

Ha  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható az  $x_0 \in I^\circ$  belső pontban, és ott lokális szélsőértéke van, akkor  $f'(x_0) = 0$ .

### Stacionárius pont

Azokat az  $x_0$  pontokat, amelyekre  $f'(x_0) = 0$  teljesül, az  $f$  függvény **stacionárius pontjainak** nevezzük.

Stacionárius pontban az érintő párhuzamos az  $x$  tengellyel, és ott **lehet lokális szélsőérték, de nem biztos, hogy van!**

Milyen  $x_0 \in I$  pontokban lehet egy  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek lokális szélsőértéke?

- $x_0 \in I^\circ$  belső pont, ahol  $f'(x_0) = 0$ ,
- $x_0$  az  $I$  intervallum valamely végpontja (ha az  $I$ -hez tartozik),
- $x_0$  az  $I$ -nek olyan pontja, ahol  $f$  nem differenciálható.

#### Elsőrendű elegendő feltétel lokális szélsőértékre

Tegyük fel, hogy  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható az  $x_0 \in I^\circ$  belső pont egy környezetében, és  $x_0$  stacionárius pontja  $f$ -nek (azaz  $f'(x_0) = 0$ ).

- Ha van olyan  $r > 0$ , hogy  $f'(x) \geq 0$  ha  $x \in ]x_0 - r, x_0[ \cap I$ , és  $f'(x) \leq 0$  ha  $x \in ]x_0, x_0 + r[ \cap I$ , akkor  $f$ -nek **lokális maximuma** van  $x_0$ -ban.
- Ha van olyan  $r > 0$ , hogy  $f'(x) \leq 0$ , ha  $x \in ]x_0 - r, x_0[ \cap I$ , és  $f'(x) \geq 0$  ha  $x \in ]x_0, x_0 + r[ \cap I$ , akkor  $f$ -nek **lokális minimuma** van  $x_0$ -ban.
- Ha van olyan  $r > 0$ , hogy  $f'(x) > 0$  ha  $x \in ]x_0 - r, x_0 + r[ \cap I$ ,  $x \neq x_0$ , vagy  $f'(x) < 0$  ha  $x \in ]x_0 - r, x_0 + r[ \cap I$ ,  $x \neq x_0$ , akkor  $f$ -nek **nincs lokális szélsőértéke**  $x_0$ -ban,  $x_0$  **inflexiós helye**  $f$ -nek.

### *n*-edrendű elegendő feltétel lokális szélsőértékre

Tegyük fel, hogy  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -szer folytonosan differenciálható az  $x_0 \in I^\circ$  belső pont egy környezetében (azaz  $f^{(n)}$  folytonos e környezetben), és

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{de} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

- Ha  $n$  páros, akkor  $f$ -nek **szigorú lokális szélsőértéke van**  $x_0$ -ban, **maximum**, ha  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , **minimum**, ha  $f^{(n)}(x_0) > 0$ .
- Ha  $n$  páratlan, akkor  $f$ -nek **nincs szélsőértéke**  $x_0$ -ban.

### Globális szélsőérték megkeresése:

- Ha  $I$  korlátos és zárt intervallum, és  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, akkor  $f$ -nek van globális maximuma és minimuma  $I$ -n.
- Ha  $I$  nem korlátos, vagy korlátos de nem zárt, akkor előfordulhat, hogy  $f$ -nek nincs szélsőértéke  $I$ -n.
- Ha  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (elég sokszor) differenciálható a korlátos és zárt  $I$  intervallumon, akkor
  - megkeressük  $f$  lokális szélsőértékeit  $I$  belső pontjaiban;
  - kiszámítjuk  $f$  értékét  $I$  végpontjaiban;
  - a lokális szélsőértékek és a végpontokban felvett értékek közül a legnagyobb adja a globális maximum értékét, a legkisebb adja a globális minimum értékét.

## 5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

### 5.7 Elaszticitás

Arra vagyunk kíváncsiak, hogyan változik meg egy áru iránti kereslet, ha annak ára 1 százalékkal nő.

#### Elaszticitás

Egy  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subset (0, \infty)$ ) függvény  $x_0$ -beli ( $x_0 \in D$ ) **elaszticitása**

$$\text{El}_{x_0} f(x) = \frac{x_0}{f(x_0)} f'(x_0),$$

amennyiben  $f'(x_0)$  létezik.

Például, ha  $a, b$  pozitív konstansok, akkor az  $f(x) = ax^b$  ( $x > 0$ ) függvény elaszticitása

$$\text{El}_x(ax^b) = \frac{x}{ax^b} abx^{b-1} = b.$$

# 6. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

## 6.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^2$ -ben

### Vektor hossza/normája

Az  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  **vektor hossza/normája**  $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

### A hossz/norma tulajdonságai

*Bármely  $x, y \in \mathbb{R}^2$  és bármely  $\lambda \in \mathbb{R}$  esetén*

*$\|x\| \geq 0$ , és  $\|x\| = 0$  akkor és csakis akkor, ha  $x = 0$ ,*

*$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,*

*$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .*

# 6. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

## 6.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^2$ -ben

### Pontok távolsága

Az  $x, y \in \mathbb{R}^2$  pontok **távolsága**  $d(x, y) := \|x - y\|$ .

### Pont (nyílt) környezete

Egy  $a \in \mathbb{R}^2$  **pont**  $\varepsilon > 0$  **sugarú (nyílt) környezetén** a

$$K(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) = \|x - a\| < \varepsilon\}$$

halmazt értjük.

$K(a, \varepsilon)$  az  $a = (a_1, a_2)$  pont körüli  $\varepsilon$  sugarú **nyílt körlap**.

Egy halmaz belső pontjának, izolált pontjának, torlódási pontjának és határpontjának fogalma, valamint a nyílt és zárt halmaz fogalma a valós esethez hasonlóan definiálhatók.



# 6. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

## 6.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^2$ -ben

### Sorozat $\mathbb{R}^2$ -ben

Egy  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$  függvényt  $\mathbb{R}^2$ -beli **sorozatnak** nevezünk. Jelölés:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ahol  $a_n := a(n)$ , és  $a_n = (a_{n1}, a_{n2})$ , ha  $n \in \mathbb{N}$ .

### Konvergens sorozat $\mathbb{R}^2$ -ben

Az  $\mathbb{R}^2$ -beli  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozatot **konvergensnek** nevezük, ha van olyan  $b \in \mathbb{R}^2$ , hogy bármely  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan  $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$  szám, hogy

$$\|a_n - b\| < \varepsilon \quad \text{amennyiben} \quad n > N(\varepsilon).$$

A  $b$  pontot a sorozat **határértékének** (limeszének) nevezük. Jelölés:

$$a_n \rightarrow b \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b.$$

Egy  $\mathbb{R}^2$ -beli sorozatot **divergensnek** nevezünk, ha nem konvergens.

## 6. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

### 6.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^2$ -ben

$\mathbb{R}^2$ -beli konvergencia = koordinátánkénti konvergencia

$$a_n = (a_{n1}, a_{n2}) \rightarrow b = (b_1, b_2) \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty$$

*akkor és csakis akkor, ha*

$$a_{ni} \rightarrow b_i \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty \quad i = 1, 2 \text{ esetén.}$$

*Ez azt jelenti, hogy egy vektorsorozat akkor és csakis akkor konvergens, ha a sorozat mindkét koordinátája konvergens, és határértéke a határvektor megfelelő koordinátája.*

# 6. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

## 6.2 Kétváltozós függvény határértéke és folytonossága

Egy  $D \subset \mathbb{R}^2$  halmaz torlódási pontjainak halmazát  $D'$ -vel jelöljük.

### Kétváltozós függvény határértéke

Legyen  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  és legyen  $(x_0, y_0) \in D'$ . Azt mondjuk, hogy  $f$ -nek van (véges, vagy végtelen) **határértéke** az  $(x_0, y_0)$  pontban, ha van olyan  $a \in \mathbb{R}_b$  bővített valós szám, hogy bármely olyan  $D$ -beli  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozatra, melyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$  és  $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$ , teljesül a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = a$  egyenlőség.

$a \in \mathbb{R}_b$ -t az  $f$  függvény  $(x_0, y_0)$  pontbeli határértékének nevezzük, jelölése  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = a$ , vagy  $f(x,y) \rightarrow a ((x,y) \rightarrow (x_0,y_0))$ .

# 6. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

## 6.2 Kétváltozós függvény határértéke és folytonossága

### Átfogalmazás

Másképpen megfogalmazva: az  $f$  függvény értelmezési tartományának egy  $(x_0, y_0) \in D'$  torlódási pontjában akkor és csakis akkor lesz  $f$  határértéke az  $a \in \mathbb{R}_b$  bővített valós szám, ha az értelmezési tartományból bármely  $(x_0, y_0)$ -hoz konvergáló  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozatot véve, melynek elemei  $(x_0, y_0)$ -tól különbözőek, a függvényértékek  $(f(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  sorozata  $a$ -hoz tart.

### Határérték egyértelműsége

*Függvény határértéke, ha létezik, akkor egyértelmű.*

Határérték **létezik az  $(x_0, y_0)$  pontban akkor is, ha a függvény nincs értelmezve a pontban**, de torlódási pontja annak (egy halmaz torlódási pontja ugyanis nem feltétlenül pontja a halmaznak).

A műveletek, egyenlőtlenségek és határérték kapcsolata most is érvényes.

## 6. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

### 6.2 Kétváltozós függvény határértéke és folytonossága

#### Függvény folytonossága

Az  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt **folytonosnak** nevezzük az  $(x_0, y_0) \in D$  pontban, ha bármely  $D$ -beli  $(x_0, y_0)$ -hoz konvergáló  $D \ni (x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) (n \rightarrow \infty)$  sorozat esetén a függvényértékek  $f(x_n, y_n) (n \in \mathbb{N})$  sorozata az  $(x_0, y_0)$  pontbeli függvényértékhez tart, azaz  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)$ .

Röviden: az  $f$  függvény  $(x_0, y_0) \in D$  pontbeli folytonossága azt jelenti, hogy ha  $D \ni (x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) (n \rightarrow \infty)$  akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)) = f(x_0, y_0).$$

- Ha  $(x_0, y_0) \in D \cap D'$ , akkor  $f$  folytonos  $(x_0, y_0)$ -ban akkor, és csakis akkor, ha  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ .
- Ha  $(x_0, y_0) \in D$ , de  $(x_0, y_0) \notin D'$ , akkor  $(x_0, y_0)$  a  $D$  **izolált pontja**, izolált pontokban  $f$  a definíció alapján mindig folytonos.

### (Totális) differenciálhatóság

Az  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt az  $(x_0, y_0) \in D$  belső pontban **(totálisan) differenciálhatónak** nevezzük, ha van olyan  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  vektor, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - A(x-x_0) - B(y-y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0.$$

Az  $f'(x_0, y_0) := (A, B)$  vektort az  $f$  függvény  $(x_0, y_0)$  **pontbeli deriváltjának** nevezzük.

GEOMETRIAI JELENTÉS: a függvény  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  növekményét az  $A(x - x_0) + B(y - y_0)$  lineáris függvény jól közelíti  $(x_0, y_0)$  közelében; a függvény által meghatározott felületnek  $(x_0, y_0)$ -ban **van érintősíkja**, melynek  $\mathbb{R}^3$ -beli egyenlete:

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

## 6. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

### 6.3 Kétváltozós függvények differenciálhatósága

#### Parciális derivált

Az  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $(x_0, y_0) \in D$  belső pontban létezik az  $x$  illetve  $y$  változója szerinti **parciális deriváltja**, ha létezik a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} \quad \text{illetve} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(y_0 + te) - f(y_0)}{t}$$

véges határérték. Ha mindkét véges határérték létezik, a függvényt **parciálisan differenciálhatónak** nevezzük az  $(x_0, y_0)$  pontban.

Jelölés:  $\partial_1 f(x_0, y_0)$ ,  $\partial_2 f(x_0, y_0)$ .

Egyéb jelölések:  $\partial_x f(x_0, y_0)$ ,  $\partial_y f(x_0, y_0)$  vagy  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  vagy  $f_x(x_0, y_0)$ ,  $f_y(x_0, y_0)$ .

## 6. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

### 6.3 Kétváltozós függvények differenciálhatósága

**(totális) deriválhatóság  $\implies$  parciális differenciálhatóság**

*Legyen  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Ha  $f$  (totálisan) differenciálható egy  $(x_0, y_0) \in D$  pontban, akkor ott parciálisan is differenciálható. Továbbá*

$$f'(x_0, y_0) = (\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0)).$$

**(totális) differenciálhatóság  $\implies$  folytonosság**

*Ha  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  az  $(x_0, y_0) \in D$  belső pontban (totálisan) differenciálható, akkor  $f$  folytonos  $(x_0, y_0)$ -ban.*

**parciális derivált folytonossága  $\implies$  (totális) differenciálhatóság**

*Ha az  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $(x_0, y_0) \in D$  belső pont egy környezetében folytonos parciális deriváltjai vannak, akkor  $f$  az  $(x_0, y_0)$  pontban (totálisan) differenciálható.*



## 6. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

### 6.4 Magasabbrendű parciális deriváltak

#### Magasabbrendű parciális deriváltak

Tegyük fel, hogy az  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $(x_0, y_0) \in D$  belső pont egy környezetében létezik az  $i$ -edik változó szerinti  $\partial_i f$  parciális deriváltja. Ha ez parciálisan differenciálható a  $j$ -edik változó szerint, úgy a deriválást elvégezve kapjuk a

$$\partial_j \partial_i f(x_0, y_0) := \partial_j (\partial_i f(x_0))$$

**második parciális deriváltját  $f$ -nek az  $(x_0, y_0)$  pontban az  $i$ -edik és  $j$ -edik változók szerint** (ebben a sorrendben!).

Hasonlóan értelmezhetjük a harmadrendű, negyedrendű stb. parciális deriváltakat is.

**Példa.** Számítsuk ki az

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^2 + y^2 e^{xy}$$

függvény összes első- és másodrendű parciális deriváltját, és hasonlítsuk össze a  $\partial_1 \partial_2 f(x, y)$  és  $\partial_2 \partial_1 f(x, y)$  vegyes deriváltakat.

**Young tétel: a vegyes parciális deriváltak függetlensége a deriválás sorrendjétől**

*Ha az  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $(x_0, y_0) \in D$  belső pont egy környezetében valamely  $m \geq 2$  esetén az összes  $m$ -edik parciális deriváltja létezik és az  $(x_0, y_0)$  pontban azok folytonosak, akkor az  $f$  függvény  $m$ -edik parciális deriváltjai az  $(x_0, y_0)$  pontban a differenciálás sorrendjétől függetlenek.*

## 6. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

### 6.5 Kétváltozós függvények szélsőértéke

Az  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $(x_0, y_0) \in D$  pontban

- **lokális/helyi maximuma (minimuma)** van, ha  $\exists \varepsilon > 0$ :

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) \leq f(x, y)) \quad \forall (x, y) \in K((x_0, y_0), \varepsilon) \cap D.$$

- **szigorú lokális/helyi maximuma (minimuma)** van, ha  $\exists \varepsilon > 0$ :

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) < f(x, y)) \quad \forall (x, y) \in K((x_0, y_0), \varepsilon) \cap D, \\ (x, y) \neq (x_0, y_0).$$

- **globális/abszolút maximuma (minimuma)** van, ha

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) \leq f(x, y)) \quad \forall (x, y) \in D.$$

- **szigorú globális/abszolút maximuma (minimuma)** van, ha

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) < f(x, y)) \quad \forall x \in D, (x, y) \neq (x_0, y_0).$$

## 6. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

### 6.5 Kétváltozós függvények szélsőértéke

#### A szélsőérték létezésének elegendő feltétele

*Korlátos, zárt halmazon folytonos függvény felveszi a függvényértékek infimumát és szuprémumát függvényértékként, ami azt jelenti, hogy a függvénynek van minimuma és maximuma (az illető korlátos, zárt halmazon).*

#### A szélsőérték létezésének szükséges feltétele

*Ha az  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $(x_0, y_0) \in D$  belső pontban lokális szélsőértéke van, és léteznek  $f$  első parciális deriváltjai  $(x_0, y_0)$ -ban, akkor*

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0) = 0.$$

(E feltételnek eleget tevő  $(x_0, y_0)$  pontokat az  $f$  függvény **stacionárius pontjainak** nevezzük.)

### Kétváltozós függvény szélsőértéke

Tegyük fel, hogy az  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  összes második parciális deriváltja folytonos az  $(x_0, y_0) \in D$  belső pont egy környezetében, továbbá

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0) = 0.$$

Legyen  $\Delta_1 = \partial_1 \partial_1 f(x_0, y_0) > 0$ ,

$\Delta_2 = \partial_1 \partial_1 f(x_0, y_0) \partial_2 \partial_2 f(x_0, y_0) - \partial_1 \partial_2 f(x_0, y_0) \partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0)$ .

- 1 Ha  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ , akkor  $f$ -nek **szigorú lokális minimuma** van  $(x_0, y_0)$ -ban,
- 2 ha  $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ , akkor  $f$ -nek **szigorú lokális maximuma** van  $(x_0, y_0)$ -ban,
- 3 ha  $\Delta_2 < 0$ , akkor  $f$ -nek **nincs szélsőértéke**  $(x_0, y_0)$ -ban.

**Példa.**

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$$

lokális szélsőértékeinek meghatározása.

## 7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

### 7.1 Definíció és alapintegrálok

#### Primitív függvény

Legyen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  adott függvény ( $I \subset \mathbb{R}$  egy intervallum).

A  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt az  $f$  függvény **primitív függvényének** nevezzük  $I$ -n, ha  $F$  differenciálható  $I$ -n, és  $F'(x) = f(x)$  ( $x \in I$ ).

*Ha  $F$  az  $f$  függvény primitív függvénye  $I$ -n, akkor*

- bármely  $c \in \mathbb{R}$  esetén  $G(x) = F(x) + c$  ( $x \in I$ ) is primitív függvénye  $f$ -nek  $I$ -n;
- $I$ -n  $f$  minden primitív függvénye  $F(x) + c$  alakú, ahol  $c \in \mathbb{R}$ .

#### Határozatlan integrál

Egy  $f$  függvény összes primitív függvényeinek halmazát  $f$  **határozatlan integráljának** nevezzük, melynek jelölése:

$\int f = \int f(x) dx = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}, F \text{ az } f \text{ egy primitív függvénye}\}$ ,  
egyszerűbben:  $\int f(x) dx = F(x) + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ).

## 7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

### 7.1 Definíció és alapintegrálok

#### Alapintegrálok

$$\int e^x dx = e^x + c \quad \mathbb{R}\text{-en}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad \mathbb{R}\text{-en, ahol } 1 \neq a > 0$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (0, \infty)\text{-en, ahol } -1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c \quad (-\infty, 0)\text{-án, illetve } (0, \infty)\text{-en}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \mathbb{R}\text{-en, ahol } n = 0, 1, \dots$$



## 7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

### 7.1 Definíció és alapintegrálok

#### Alapintegrálok

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad \mathbb{R}\text{-en}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad \mathbb{R}\text{-en}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c \quad \left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[ -n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + c \quad ]k\pi, (k+1)\pi[ -n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c \quad ]-1, 1[ \text{-en}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c \quad \mathbb{R}\text{-en}$$

# 7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

## 7.2 Integrálási szabályok

*Ha  $f$ -nek és  $g$ -nek van primitív függvénye  $I$ -n, akkor  $f + g$ -nek és bármely  $c \in \mathbb{R}$  esetén  $c \cdot f$ -nek is van  $I$ -n, és*

$$\int (f + g) = \int f + \int g, \quad \int (cf) = c \int f.$$

### Parciális integrálás

*Ha  $f$  és  $g$  differenciálhatók és  $fg'$ -nek van primitív függvénye  $I$ -n, akkor  $f'g$ -nek is van primitív függvénye  $I$ -n, és*

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

# 7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

## 7.2 Integrálási szabályok

### Helyettesítéses integrálás

Ha  $f$ -nek van primitív függvénye  $I$ -n,  $g : J \rightarrow I$  differenciálható a  $J$  intervallumon, akkor  $(f \circ g) \cdot g'$ -nek is van primitív függvénye  $J$ -n, és

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \left( \int f \right) \circ g,$$

vagyis

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du \Big|_{u=g(x)}.$$

**Másképpen:** ha  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  és  $g : J \rightarrow I$  differenciálhatók a  $J$  intervallumon,  $g'(x) \neq 0$  ( $x \in J$ ) és  $(f \circ g) \cdot g'$ -nek van primitív függvénye, akkor  $f$ -nek is van primitív függvénye  $I$ -n, és

$$\int f = \int ((f \circ g) \cdot g') \circ g^{-1},$$

vagyis

$$\int f(x) dx = \int f(g(u)) g'(u) du \Big|_{u=g^{-1}(x)}.$$

# 7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

## 7.2 Integrálási szabályok

**Például:**

$$\int g^\alpha g' = \frac{g^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{g'}{g} = \ln |g| + c,$$

amiből például

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx = - \ln |\cos x| + c$$

a  $]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) intervallumokon,

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = - \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} \, dx = - \ln |\sin x| + c$$

a  $]k\pi, (k+1)\pi[$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) intervallumokon.

### Lineáris helyettesítés

Ha  $f$  primitív függvénye  $F$ , és  $a \neq 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , akkor

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(u) du|_{u=ax+b} = \frac{1}{a} F(ax + b) + c.$$

# 7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

## 7.2 Integrálási szabályok

### További alapintegrálok ( $a > 0$ )

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c, \quad (|x| < a),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c, \quad (|x| > a),$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c, \quad (|x| > a, \text{ vagy } |x| < a).$$

## 7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

### 7.3 Elemien integrálható függvények osztályai

#### Elemien integrálható függvény

Egy függvényt **elemien integrálhatónak** nevezünk, ha primitív függvénye elemi függvény.

#### Parciálisan integrálható függvények

Ha  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ) **polinom**, akkor *parciálisan integrálható*

$$P(x)e^x : \quad f'(x) = e^x, \quad g(x) = P(x) \quad \text{választással,}$$

$$P(x) \sin x : \quad f'(x) = \sin x, \quad g(x) = P(x) \quad \text{választással,}$$

$$P(x) \cos x : \quad f'(x) = \cos x, \quad g(x) = P(x) \quad \text{választással,}$$

$$P(x) \ln x : \quad f'(x) = P(x), \quad g(x) = \ln x \quad \text{választással,}$$

$$P(x) \arcsin x : \quad f'(x) = P(x), \quad g(x) = \arcsin x \quad \text{választással,}$$

$$P(x) \operatorname{arctg} x : \quad f'(x) = P(x), \quad g(x) = \operatorname{arctg} x \quad \text{választással.}$$

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.1 Az integrál definíciója és alaptulajdonságai

#### Intervallum felosztása

Legyen  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  egy zárt intervallum.

- A  $P = \{x_j : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ponthalmazt az  $[a, b]$  intervallum egy **felosztásának** nevezzük,
- $x_j$  az  **$i$ -edik osztópont**,
- $[x_{i-1}, x_i]$  az  **$i$ -edik intervallum**,
- $x_i - x_{i-1}$  az  **$i$ -edik intervallum hossza**,
- a  $\|P\| := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$  szám a  **$P$  felosztás finomsága**.



## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.1 Az integrál definíciója és alaptulajdonságai

#### Integrálközelítő összeg

Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  egy korlátos függvény,  $P$  az  $[a, b]$  egy felosztása,  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) közbenső pontok. Az

$$s(f, P, t) := \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

összeget az  $f$  függvény  $P$  felosztáshoz és a  $t = (t_1, \dots, t_n)$  közbenső pontrendszerhez tartozó **integrálközelítő összegének** nevezzük.

Az  $s(f, P, t)$  összeg **geometriai jelentése**:

a felosztás és a közbenső pontok által meghatározott téglalapok területének (előjeles) összege, ami annál jobban közelíti a görbe alatti (előjeles) területet, minél finomabb a felosztás.

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.1 Az integrál definíciója és alaptulajdonságai

#### Riemann integrálhatóság és Riemann integrál

Az  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvényt **Riemann integrálhatónak** nevezzük  $[a, b]$ -n, ha van olyan  $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$  szám, hogy bármely  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan  $\delta(\varepsilon)$ , hogy

$$|s(f, P, t) - \mathcal{I}| < \varepsilon$$

ha  $\|P\| < \delta(\varepsilon)$  és  $t = (t_1, \dots, t_n)$  tetszőleges közbenső pontrendszer. Az  $\mathcal{I}$  számot az  $f$  függvény  $[a, b]$ -n vett **Riemann integráljának**

nevezzük, melynek jelölése  $\int_a^b f(x) dx$  vagy  $\int_a^b f$ .

Az  $\int_a^b f(x) dx$  **geometriai jelentése:**

az  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  egyenesek és az  $y = f(x)$  függvénygörbe által meghatározott síkidom **előjeles területe** (az  $x$  **tengely alatti részt az integrál negatív előjellel számolja**).

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.1 Az integrál definíciója és alaptulajdonságai

Az  $[a, b]$ -n **Riemann integrálható függvények osztályát**  $\mathcal{R}[a, b]$  jelöli.

#### Az integrál alaptulajdonságai

Ha  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ , akkor bármely  $c \in \mathbb{R}$  és bármely  $a < d < b$  mellett

$$f + g \in \mathcal{R}[a, b],$$

$$\text{és} \quad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

$$c \cdot f \in \mathcal{R}[a, b],$$

$$\text{és} \quad \int_a^b (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f,$$

$$f \in \mathcal{R}[a, d], \quad f \in \mathcal{R}[d, b],$$

$$\text{és} \quad \int_a^b f = \int_a^d f + \int_d^b f,$$

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.1 Az integrál definíciója és alaptulajdonságai

#### Az integrál és a rendezés kapcsolata

Ha  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$  és  $f(x) \leq g(x)$  ( $x \in [a, b]$ ), akkor

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

#### Az integrálszámítás középértéktétele

Ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , akkor  $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$ ,

ahol

$$m := \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M := \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Ha  $f$  folytonos  $[a, b]$ -n, akkor  $\exists \xi \in [a, b]$ , melyre  $f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f$ .

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.1 Az integrál definíciója és alaptulajdonságai

#### Az integrálhatóság elegendő feltétele

*Egy pontsorozat kivételével folytonos függvény Riemann integrálható.*

#### Az integrál és az abszolút érték kapcsolata

*Ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , akkor  $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ , és*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.2 Az integrál kiszámítása, Newton-Leibniz formula

#### Területmérő függvény

Legyen  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , akkor a

$$T(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

függvényt  $f$  **területmérő függvényének** nevezzük.

#### A területmérő függvény tulajdonságai

*Ha  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  és  $T$  az  $f$  területmérő függvénye, akkor*

- 1  $T$  folytonos  $[a, b]$ -n,
- 2 ha  $f$  folytonos  $x_0 \in [a, b]$ -ben, akkor  $T$  differenciálható  $x_0$ -ban, és  $T'(x_0) = f(x_0)$ .

#### Folytonos függvény primitív függvénye

*Minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, mégpedig a területmérő függvénye.*

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.2 Az integrál kiszámítása, Newton-Leibniz formula

#### Newton-Leibniz formula

*Tegyük fel, hogy  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos  $[a, b]$ -n, és  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  az  $f$  egy primitív függvénye  $[a, b]$ -n, akkor*

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

*A Newton-Leibniz formula akkor is érvényes, ha  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos  $[a, b]$ -n, és  $F'(x) = f(x)$  ( $x \in ]a, b[$ ).*

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.2 Az integrál kiszámítása, Newton-Leibniz formula

#### Parciális integrálás határozott integrálra

Ha  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálhatók  $[a, b]$ -n, akkor

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx,$$

ahol  $[f(x)g(x)]_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a)$ .

#### Helyettesítéses integrálás határozott integrálra

Ha  $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$  folytonosan differenciálható  $[a, b]$ -n és  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos  $[c, d]$ -n, akkor

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$



## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.3 Az integrál néhány közgazdaságtani alkalmazása

#### Olajkitermelés

A  $t = 0$  időpillanatban kezdjük el kitermelni az olajat egy olyan kútból, amely  $K$  hordó olajat tartalmaz. Jelölje  $x(t)$  a  $t$ -edik időpont után megmaradó olaj mennyiségét,  $u(t)$  pedig a kitermelés sebességét a  $t$  időpontban. Feltéve, hogy  $x(t)$  differenciálható,  $x'(t) = -u(t)$  és  $x(0) = K$  adódik. Innen

$$\int_0^t -u(t)dt = x(t) - x(0), \quad \text{azaz} \quad x(t) = K - \int_0^t u(t)dt.$$

Speciálisan, ha  $u(t) = u_0$  konstans, akkor  $x(t) = K - u_0 t$ , azaz a kút  $t = K/u_0$  idő után merül ki.

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.3 Az integrál néhány közgazdaságtani alkalmazása

#### Valutatartalék

Jelölje  $F(t)$  egy ország devizakészletét a  $t$  időpontban. Ha  $F$  differenciálható, akkor az időegység alatti devizakészlet-változást az  $f(t) = F'(t)$  függvény írja le.

Ha  $f(t) > 0$ , akkor az adott pillanatban devizabeáramlás történik az országba, míg  $f(t) < 0$  esetén devizakiáramlás.

A Newton-Leibniz formula alapján

$$F(t_1) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt.$$

Ez a formula megadja a  $[t_0, t_1]$  időintervallumban a devizakészletben történt változást.

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.4 Impropius integrál

#### Integrál végtelen intervallumokon

Legyen  $f : ] - \infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , és tegyük fel, hogy minden  $t < b$  mellett  $f \in \mathcal{R}[t, b]$ , akkor

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx,$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  **impropius integrál konvergens**, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) **divergens**.

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.4 Impropius integrál

#### Integrál végtelen intervallumokon

Legyen  $f : ]a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , és tegyük fel, hogy minden  $a < t$  mellett  $f \in \mathcal{R}[a, t]$ , akkor

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx,$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az  $\int_a^\infty f(x) dx$  **impropius integrál konvergens**, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) **divergens**.

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.4 Improprius integrál

#### Integrál végtelen intervallumokon

Legyen  $f : ] - \infty, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , és tegyük fel, hogy minden  $s < t$  mellett  $f \in \mathcal{R}[s, t]$ , akkor tetszőleges  $c \in \mathbb{R}$  esetén

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &:= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_c^t f(x) dx,\end{aligned}$$

feltéve, hogy mindkét jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  **impropius integrál konvergens**, ellenkező esetben (amikor valamelyik jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) **divergens**.

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.4 Impropius integrál

#### Nem korlátos függvények integrálása

Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , és tegyük fel, hogy  $f$  **nem korlátos**  $[a, b]$ -n, **de minden**  $a < t < b$  **mellett**  $f \in \mathcal{R}[t, b]$ , **(így  $f$  korlátos  $[t, b]$ -n!)**, akkor

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b f(x) dx,$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az  $\int_a^b f(x) dx$  *impropius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.4 Impropius integrál

#### Nem korlátos függvények integrálása

Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , és tegyük fel, hogy  $f$  **nem korlátos**  $[a, b]$ -n, **de minden**  $a < t < b$  **mellett**  $f \in \mathcal{R}[a, t]$ , **(így  $f$  korlátos  $[a, t]$ -n!)**, akkor

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) dx,$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az  $\int_a^b f(x) dx$  *impropius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.4 Impropius integrál

#### Nem korlátos függvények integrálása

Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , és tegyük fel, hogy  $f$  **nem korlátos**  $[a, b]$ -n, **de van olyan**  $c \in ]a, b[$ , **hogy minden**  $a < s < c < t < b$  **mellett**  $f \in \mathcal{R}[a, s]$  **és**  $f \in \mathcal{R}[t, b]$ , **(így  $f$  korlátos  $[a, s]$ -n és  $[t, b]$ -n, de nem korlátos a  $c$  pont egy környezetében!),** akkor

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &:= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{s \rightarrow c-0} \int_a^s f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c+0} \int_t^b f(x) dx,\end{aligned}$$

feltéve, hogy mindkét jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az  $\int_a^b f(x) dx$  *impropius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor valamelyik jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.



## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.4 Impropius integrál

**A Riemann integrál (beleértve az improprius integrált is) értéke nem változik, ha a függvény értékét véges sok pontban megváltoztatjuk.**

Ezért a nem korlátos függvények (improprius) integráljának pl. az első definíciójában (amikor  $f$  az  $a$  végpont egy környezetében nem korlátos) mindegy, hogy a kiinduló  $f$  függvény az  $a$  pontban definiálva van vagy sem, mert utóbbi esetben  $f(a)$ -t tetszőlegesen értelmezve az integrál nem változik.

Mindhárom definíció esetében feltételeztük, hogy  $f$  értelmezve van abban a pontban, melynek környezetében  $f$  nem korlátos.

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.5 Kettős integrál

#### Téglalap felosztása

Legyen  $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  egy zárt téglalap, és

$$P_x = \{x_i : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\},$$

$$P_y = \{y_j : c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d\}$$

az  $[a, b]$  és  $[c, d]$  intervallumok felosztásai.

- A  $P := P_x \times P_y = \{(x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ponthalmazt a  $D$  téglalap egy **felosztásának** nevezzük,
- $D_{i,j} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) a **felosztás téglalapjai**,
- a  $\|P\| := \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$  szám a  $P$  **felosztás finomsága** (a  $D_{i,j}$  téglalapok átlói hosszának a maximuma).

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.5 Kettős integrál

#### Integrálközelítő összeg

Legyen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  egy korlátos függvény a  $D$  téglalapon,  $P$  a  $D$  egy felosztása,  $(s_i, t_j) \in D_{i,j}$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) közbenső pontok,  $v = ((s_1, t_1), (s_1, t_2), \dots, (s_m, t_n))$  a közbenső pontok rendszere/vektora. Az

$$s(f, P, v) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(s_i, t_j) m(D_{i,j})$$

összeget, ahol  $m(D_{i,j}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$  a  $D_{i,j}$  téglalap területe (mértéke), az  $f$  függvény  $P$  felosztáshoz és a  $v$  közbenső pontrendszerhez tartozó **integrálközelítő összegének** nevezzük.

Az  $s(f, P, v)$  összeg **geometriai jelentése**: a felosztás és a közbenső értékek által meghatározott hasábok térfogatának (előjeles) összege, ami annál jobban közelíti az  $f$  által meghatározott felület alatti (előjeles) térfogatot, minél finomabb a felosztás.

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.5 Kettős integrál

#### Kettős Riemann integrál téglalapon

Az  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvényt **Riemann integrálhatónak** nevezzük a  $D$  téglalapon, ha van olyan  $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$  szám, hogy bármely  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan  $\delta(\varepsilon)$ , hogy

$$|s(f, P, v) - \mathcal{I}| < \varepsilon$$

ha  $\|P\| < \delta(\varepsilon)$  és  $v = ((s_1, t_1), (s_1, t_2), \dots, (s_m, t_n))$  tetszőleges közbenső pontrendszer. Az  $\mathcal{I}$  számot az  $f$  függvény  $D$ -n vett **Riemann integráljának** nevezzük, melynek jelölése  $\iint_D f(x, y) dx dy$ .

Az  $\iint_D f(x, y) dx dy$  **geometriai jelentése**: az  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ ,  $z = 0$  síkok és a  $z = f(x, y)$  felület által meghatározott idom **előjeles térfogata** (a  $z = 0$  sík alatti részt az integrál negatív előjellel számolja).

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.5 Kettős integrál téglalapon

#### Kettős integrál kiszámítása

Legyen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos a  $D = [a, b] \times [c, d]$  téglalapon. Ekkor  $f$  integrálható  $D$ -n, és

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

vagy

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

Tehát a kettős integrál kiszámítása **ismételt (iterált, szukcesszív) integrálással történik, a sorrend** (az hogy először  $x$  szerint másodszer  $y$  szerint integrálunk, vagy fordítva) **nem számít**.

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.5 Kettős integrál

#### Elsőfajú normáltartomány

Az  $x = a$ ,  $x = b$  egyenesek és az  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) görbék által határolt

$$D := \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

tartomány, ahol  $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvények úgy, hogy  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$  ha  $x \in [a, b]$ .

#### Kettős Riemann integrál elsőfajú normáltartományon

Ha  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos a  $D$  elsőfajú normáltartományon, akkor

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy := \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

## 8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

### 8.5 Kettős integrál

#### Másodfajú normáltartomány

Az  $y = c$ ,  $y = d$  egyenesek és az  $x = \psi_1(y)$ ,  $x = \psi_2(y)$  ( $y \in [c, d]$ )  
görbék által határolt

$$D := \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

tartomány, ahol  $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvények úgy,  
hogy  $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$  ha  $y \in [c, d]$ .

#### Kettős Riemann integrál másodfajú normáltartományon

Ha  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos a  $D$  másodfajú normáltartományon, akkor

$$\iint_D f(x, y) dx dy := \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$