

HÁZI FELADATOK A GAZDASÁGI MATEMATIKA I. TÁRGY GYAKORLATAIHOZ I.

1. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re

$$(1) \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

$$(2) \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1},$$

$$(3) \quad 5 \cdot 7^n - 2 \cdot 4^n \text{ osztható } 3\text{-mal.}$$

2. Legyen

$$A = [-1, 1[\cup \{-2, 2\}, \quad B =]-\infty, 3] \setminus]-\infty, 0], \quad C = [1, 3[\cup]2, 4], \quad D = [-1, 1] \cap]0, 2].$$

Határozzuk meg A, B, C, D belső, izolált, torlódási és határpontjait!

3. Határozzuk meg az alábbi a_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozatok határértékét, amennyiben az létezik.

$$a_n = \sqrt{n^2 + 3} - n, \quad a_n = \sqrt{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 + 1},$$

$$a_n = \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 4} \right)^{n^2 + 7}, \quad a_n = \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + 2} \right)^{n^2 + 1},$$

$$a_n = \frac{3^n + 7^2}{5^n + 3^n + 2^5}, \quad a_n = \frac{4^n + 2^4}{4^n + 3^n + 2^n + 1},$$

$$a_n = \frac{2 + 3n^2}{n^2 + 9n}, \quad a_n = \frac{n^4 - n + 1}{2n^4 + 7n^3 - 2},$$

$$a_n = \frac{1 + n + 5n^2}{2 + 3n + 4n^3}, \quad a_n = \frac{2 - n^2 + 5n^5}{2 + 3n^3 + 4n^7},$$

$$a_n = \frac{2 + n^5 + 8n^6}{2 + 900n^5}, \quad a_n = \frac{6 - n^2 + 6n^8}{3n + 4n^5 - 9n^7}.$$

4. Határozzuk meg, hogy az alábbiak közül melyik geometriai sor, és a konvergensnek számítsuk ki az összegét!

$$(a) \quad 7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \dots \quad (b) \quad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots$$

$$(c) \quad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \dots \quad (b) \quad 1 - 4 + 16 - 64 + \dots$$

5. Számítsuk ki a következő végtelen sorok összegét:

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}}, \quad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2^n}.$$

6. Határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x - 6}, \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - x}{x^6 + x^2 + 1}, \quad (c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 8x} - x \right), \quad (d) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+x},$$

$$(e) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x - 4}{x^3 + 4x - 8}, \quad (f) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 - x^2 + 1}{x^4 - x - 2}, \quad (g) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 4} \right), \quad (h) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+4} \right)^{5+x}.$$