Debreceni Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar

Feladatok a Gazdasági matematika II. tárgy gyakorlataihoz
Lineáris algebra és többváltozós függvények

♠ a megoldásra ajánlott feladatokat jelöli, **e feladatokat a félév végére megoldottnak tekintjük**

★ a nehezebb feladatokat jelöli

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér

(1) Legyen $a = (-3,\ 4,\ 2),\ b = (5,\ 0,\ -4),\ c = (2,\ 7,\ 8)$. Határozzuk meg az $a - 3b + c$, $3a + b - 2c$, $5a + 4b - 6c$ vektorokat.

(2) ♠ Legyen $4(x,\ y,\ z) + 5(-1,\ 2,\ 4) = (-1,\ 8,\ 32)$. Határozzuk meg az $(x,\ y,\ z)$ vektort.

(3) Lineárisan függetlenek-e a $(2,\ 3)$ és az $(5,\ 4)$ vektorok?

(4) Igazoljuk, hogy az a_1, a_2, a_3 vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban. Számoljuk ki az x vektor koordinátáit ebben a bázisban, ha $a_1 = (2,\ -1,\ 3),\ a_2 = (1,\ 4,\ -2),\ a_3 = (-1,\ 0,\ 2),\ x = (1,\ -1,\ 0)$.

(5) Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ban az a_1, a_2, a_3 vektorok. Ha igen, akkor számoljuk ki az x vektor koordinátáit ebben a bázisban, ha $a_1 = (1,\ 1,\ 1),\ a_2 = (1,\ 1,\ 2),\ a_3 = (1,\ 2,\ 3),\ x = (6,\ 9,\ 14)$.

(6) ♠ Számoljuk ki az a vektor hosszát, az a és b vektorok skaláris szorzatát, és az általuk bezárt szöget, ha

(a) ♠ $a = (2,\ -1,\ 4),\ b = (3,\ 5,\ 2)$;

(b) $a = (1,\ 0,\ 7),\ b = (0,\ -2,\ 6)$;

(c) $a = (3,\ 4,\ 1),\ b = (-2,\ 2,\ 6)$.

(7) Határozzuk meg a következő vektorok által generált altér egy bázisát és dimenzióját

$$\begin{aligned} a_1 &= (2,1,3,-1) \\ a_2 &= (-1,1,-3,1) \\ a_3 &= (4,5,3,1) \\ a_4 &= (1,5,-3,1). \end{aligned}$$

(8) Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^5$ vektortérben a megadott részhalmazok? Ha igen, akkor hány dimenziósak?

(a) ♠ $L = \{\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid\ x_1 = x_5,\ x_2 = x_3\ \}$

(b) $L = \{\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0\ \}$

(c) $L = \{\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid\ x_i = 2k$ páros szám $\ k \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, .., 5\ \}$

(d) $L = \{\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid\ x_1, x_5 \in \mathbb{Q}\ \}$

(e) ♠ $L = \{\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\ \}$

Mátrixok és determinánsok

(9) ♠ Számítsa ki az AB, BA, AC, ABC, ADF, DF, G^2, $3G^2 - 2G + 5G^0$ mátrixokat, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(10) Határozza meg az AX, $X^\top A$ mátrixokat, ha

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ és (a) } \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(11) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az A^n mátrixot!

(12) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy $A^2 = A$!

(13) ♠ Határozzuk meg az összes olyan X 2x2-es mátrixot, melyre $AX = XA$, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(14) ♠ Az első évben három cég A, B és C piaci részesedései rendre 20, 60, 20%. A második évben ez a következőképpen változik: A fogyasztóinak 85%-a nála maradt, 5%-a B-hez, 10%-a C-hez kerül, B fogyasztóinak 55%-a nála marad, 10%-a A-hoz, 35%-a C-hez kerül, míg C fogyasztóinak 85%-a nála marad, 10%-a A-hoz, 5%-a B-hez kerül. Írjuk fel a piaci részesedés-vektort, és jelöljük azt $s \in \mathbb{R}^{3\times 1}$-el. Tekintsük a

$$T = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,10 & 0,10 \\ 0,05 & 0,55 & 0,05 \\ 0,10 & 0,35 & 0,85 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Számoljuk ki a Ts vektort, mutassuk meg, hogy az éppen második év piaci részesedés vektora. Hogyan értelmezhető a $T^2 s := T(Ts)$ vektor?

(15) Az első évben három cég A, B és C piaci részesedései rendre 15, 40, 45%. A második évben ez a következőképpen változik: A fogyasztóinak 75%-a nála maradt, 15%-a B-hez, 10%-a C-hez kerül, B fogyasztóinak 90%-a nála marad, 5%-a A-hoz, 5%-a C-hez kerül, míg C fogyasztóinak 65%-a nála marad, 30%-a A-hoz, 5%-a B-hez kerül. Legyen a piaci részesedés-vektora $s \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Határozza meg a $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixot úgy, hogy, Ts éppen második év piaci részesedés vektora legyen!

(16) ♠ Egy cég 3 raktárban 4 féle terméket tárol. Az alábbi táblázat mutatja a tárolt mennyiségeket, az egyes termékek egységárait, a raktározás költségét, valamint a raktár befogadó képességét.

	T1	**T2**	**T3**	**T4**	**költség (Ft/db)**	**Kapacitás**
R1	10	4	10	5	200	30
R2	3	5	0	15	300	25
R3	15	9	10	40	150	80
Egys.ár(Ft/db)	200	100	300	50		

Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

(a) Hány darabot tárolnak az egyes termékekből?

(b) Mekkora az egyes raktárak szabad kapacitása?

(c) Mennyi az egyes termékek raktározási költsége?

(d) Mekkora értéket tárolnak az egyes raktárak?

(17) Egy cég 4-féle terméket állít elő, melyhez 3-féle alapanyag szükséges. Az alábbi táblázat mutatja, hogy melyik termék előállításához hány egység szükséges az egyes alapanyagokból, továbbá tartalmazza a táblázat az egyes alapanyagok árát, valamint a kész termékek eladási árát.

	T1	**T2**	**T3**	**T4**	**költség (Ft/db)**
A1	1	2	5	1	100
A2	0	4	2	3	200
A3	2	3	5	4	300
Egys.ár(Ft/db)	400	600	500	400	

Az egyes termékekből rendre 10, 20, 30, 40 darabot állítunk elő. Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

(a) Mennyi az egyes termékek előállítási költsége?

(b) Mennyi a cég bevétele?

(c) Mennyi a haszon az egyes termékeken?

(d) Mennyi az összhaszon (profit)?

(18) Egy üzemben importból beszerzett 5-féle alkatrészből 4-fajta végterméket szerelnek össze. Egy megfigyelt időszakban a V_1 termékből 50, a V_2 termékből 70, a V_3 termékből 32, a V_4 termékből 20 egységet állítanak elő. Az egyes termékek fajlagos alkatrész-szükségletét a következő táblázat mutatja:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
V_1	1	0	2	3	1
V_2	0	2	1	3	0
V_3	0	3	2	1	3
V_4	1	5	3	2	5

Az egyes alkatrészek beszerzési ára $3; 2,5; 1; 4; 2$ ezer Ft/darab. Válaszoljunk mátrixműveletek felhasználásával az alábbi kérdésekre:

(a) Mekkora a termékek fajlagos alkatrészköltsége?

(b) Az egyes alkatrészekből hány darabot kell importálni?

(c) Mennyi a teljes importköltség?

(19) Számítsa ki a következő determinánsok értékét:

a) ♠ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

c) ♠ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$.

(20) A kifejtési tétel alkalmazásával számítsa ki a következő determinánsok értékét:

a) ♠ $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$.

(21) Határozza meg az A mátrix determinánsát, ha az A mátrix a_{ij} eleme
a) $a_{ij} = \min(i, j)$,
b) $a_{ij} = \max(i, j)$.

(22) ♠ Határozzuk meg az x valós számot úgy, hogy

$$a)\ \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & x \end{vmatrix} = 0, \qquad b)\ \begin{vmatrix} x^2 & 2x-1 \\ 2x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

teljesüljön.

(23) Írja fel x polinomjaként az alábbi determinánsokat:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$.

(24) ♠ Határozza meg x-et, ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

(25) Mutassa meg kizárólag sorok (vagy oszlopok) egymásból való kivonásával, hogy

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix} = 0.$$

(26) Mikor invertálható az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix? Hogyan számíthatjuk ki az inverzét?

(27) Invertálhatók-e az alábbi mátrixok, és ha igen, határozza meg az inverzüket!

a) ♠ $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

c) ♠ $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(28) Mennyi az A mátrix rangja? Adja meg a sorvektorai által generált altér egy bázisát!

a) ♠ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

(29) Milyen λ értékek mellett invertálhatók az alábbi mátrixok:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, b) ♠ $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -12 \\ -2 & -3 & \lambda \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$.

(30) ♠ Mutassa meg, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

mátrix invertálható, és határozza meg az $A \cdot X = B$ egyenlet összes $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ megoldását, ha

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -14 & 8 & -5 \\ 11 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

(31) ♠ Határozza meg az A mátrix sajátétékeit és sajátvektorait, ahol

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Lineáris egyenletrendszerek

(32) Oldja meg Gauss eliminációval az alábbi lineáris homogén egyenletrendszereket:

♠ $\begin{matrix} 8x_1 & +2x_2 & +9x_3 & +5x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 8x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +x_4 & = & 0 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 2x_1 & +x_2 & -4x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +5x_2 & -7x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & -5x_2 & -6x_3 & = & 0 \end{matrix}$,

$\begin{matrix} 3x_1 & +x_2 & +x_3 = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 = & 0 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 9x_1 & +21x_2 & -15x_3 & +5x_4 & = & 0 \\ 12x_1 & +28x_2 & -20x_3 & +7x_4 & = & 0 \end{matrix}$.

(33) Oldja meg Gauss eliminációval az alábbi lineáris inhomogén egyenletrendszereket:

$$\spadesuit\quad \begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & & = & 4 \end{array}, \qquad \begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +5x_2 & -8x_3 & = & 8 \\ 4x_1 & +3x_2 & -9x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = & 7 \\ x_1 & +8x_2 & -7x_3 & = & 12 \end{array}.$$

(34) ♠ A Cramer szabállyal a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(35) ♠ Milyen a, b mellett alkalmazható a Cramer szabály a következő lineáris egyenletrendszerre?

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Legyen $a = 1$, megválasztható-e (és ha igen, akkor hogyan) b úgy, hogy $x_1 = 4$ megoldása legyen az egyenletrendszernek?

(36) Megoldhatók-e következő lineáris egyenletrendszerek? Ha igen oldjuk meg őket!

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -6 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & -4 \end{array}, \qquad \spadesuit\quad \begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5 \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 14 \end{array}.$$

(37) Adjuk meg a következő lineáris egyenletrendszerek összes megoldását (a Cramer szabály felhasználásával)! Tudjuk, hogy az első rendszer mátrixának és bővitett mátrixának rangja 2, de ha a (2,3) indexhez tartozó 1 elemet 3-ra változtatjuk, akkor az előbbi két rang 3-ra változik és a bal felső sarokdetermináns vehető rangmeghatározó determinánsnak.

$$\spadesuit\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\spadesuit\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(38) ♠ Tekintsük a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & +\lambda x_2 & +4x_3 & = & 5 \\ 7x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = & k \end{array}.$$

a) Legyen $k = 8$. λ milyen értékei esetén nincs megoldása az egyenletrendszernek?
b) Most legyen $\lambda = -2$. Milyen k esetén oldható meg az egyenletrendszer?

(39) Mátrixinvertálás segítségével oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszereket:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 15 \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 &= -8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 14. \end{aligned}$$

Lineáris leképezések, diagonalizálás

(40) ♠ Legyen a $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa (a természetes bázisra vonatkozóan)

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Határozzuk meg az $x = (1, 1, 2)$ vektor képét!
b) Határozzuk meg azt az x vektort, melynek képvektora az $y = (-2, -5, -5)$ vektor!

(41) Vizsgáljuk meg, hogy melyek diagonalizálhatók az alábbi mátrixok közül. A diagonalizálhatók esetében határozzuk meg azt az S mátrixot, amellyel $S^{-1}AS$ diagonális mátrix.

$$♠\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(42) Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

$$♠A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} (\lambda_1 = 4) \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(43) Diagonalizáljuk az alábbi szimmetrikus mátrixokat, azaz határozzunk meg olyan U ortogonális mátrixot, melyre $U^\top AU$ diagonális! (U oszlopvektorai a mátrix normált lin. független sajátvektorai)

$$♠\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$♠\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(44) Határozzunk meg a következő kvadratikus formák kanonikus alakját és döntsük el hogy definitség szempontjából milyenek!

a) ♠ $2x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2$ b) $9x_1^2 + 16x_2^2 + 24x_1x_2$

c) ♠ $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_2x_3$ d) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3$

Többváltozós függvények, sorozatok, folytonosság

(45) ♠ Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát (és ábrázolja a kapott halmazokat az $\mathbb{R}^2$ ill. $\mathbb{R}^3$ térben):

(a) $f(x, y) = \ln xy$;

(b) $f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \quad (a,b>0)$;

(c) $f(x,y)=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$;

(d) $f(x,y)=\dfrac{1}{\arccos(\sqrt{x^2+y^2}-1)}$;

(e) $f(x,y,z)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}} \quad (R>r>0)$.

(46) ♠ Határozza meg, milyen alakzatot alkotnak az $f(x,y)=z_0$ egyenlet megoldásai, ha

(a) $f(x,y)=x^2+y^2,\ z_0=25$;

(b) $f(x,y)=\cos\pi(x+y),\ z_0=1$;

(c) $f(x,y)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}xy,\ z_0=1$;

(d) $f(x,y)=\sin\pi(x^2+y^2), z_0=0$.

(47) (a) Szemléltessük az $f(x,y)=x^2+y^2$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ függvényt!

(b) Szemléltessük az $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ függvényt!

(48) ♠ Létezik-e határértéke az ($\mathbb{R}^3$-beli) (a_n) sorozatnak ? Ha igen, határozza meg.

(a) $a_n=\left(\frac{n^2}{n^3+1},\ 2^{-n},\ \frac{1}{n!}\right)$;

(b) $a_n=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \frac{\sin n}{n},\ \frac{2n}{n+1}\right)$;

(c) $a_n=\left(\sin\pi n,\ n,\ \frac{1}{n^2}\right)$.

(49) Léteznek-e a következő függvényhatárértékek ? Ha igen, határozza meg.

(a) ♠ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-2)}\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$;

(b) ♠ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,0)}\frac{\sin xy}{y}$;

(c) ♠ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{1}{x-y}$;

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+xy-y}{x+xy+y}$.

(50) ♠ Folytonosak-e az alábbi, az egész $\mathbb{R}^2$-n értelmezett függvények?

(a) $f(x,y)=x^2-y$;

(b) $f(x,y)=\sin xy$;

(c) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$.

(51) Folytonosak-e $(0,0)$-ban a következő függvények ?

(a) ♠ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0);\end{cases}$

(b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0);\end{cases}$

(c) ♠ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Többváltozós függvények differenciálása

(52) ♠ Számítsa ki a következő függvények első parciális deriváltjait, majd hozza őket egyszerűbb alakra.

(a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - x + 1$;

(b) $f(x, y) = (x^3 - 2x^2y + y^2)^7$;

(c) $f(x, y) = xy \cos x^2y^2$;

(d) $f(x, y) = e^{x^2+y^2-1}$;

(e) $f(x, y) = (2x + y)^{2x-y}$.

(53) ♠ Számítsa ki a következő függvények másodrendű parciális deriváltjait.

(a) $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + xy^2 + y^3$;

(b) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$;

(c) $f(x, y) = \sin x \, \cos y$;

(d) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

(54) ♠ Határozza meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját az a irány mentén (figyelem a nem egységvektor!) a megadott (x_0, y_0) pontban!

(a) $f(x, y) = 2x^2 + y - 1, \quad a = (1, 1), \ (x_0, y_0) = (2, 1)$,

(b) $f(x, y) = xe^{xy} - xy, \quad a = (3, 4), \ (x_0, y_0) = (1, 1)$.

(55) ★ Mutassa meg, hogy az alábbi függvény parciális differenciálhányadosai az origóban nem folytonosak, de ott a függvény mégis differenciálható.

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(56) ★ Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható az $(x_0, y_0) \in D$ belső pontban és tegyük fel, hogy itt az első parciális deriváltak legalább egyike nem nulla. Milyen e irány mentén lesz a $D_e f(x_0, y_0)$ iránymenti derivált maximális (minimális)?

(57) A láncszabály segítségével számítsa ki $h'(t)$-t, ha $h(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ és

(a) ♠ $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy, \quad \varphi(t) = t^2, \ \psi(t) = t^3$,

(b) $f(x, y) = x \ln y + y \ln x, \quad \varphi(t) = t + 1, \ \psi(t) = \ln t$.

(58) A láncszabály segítségével számítsa ki $\partial_1 F(u_1, u_2), \partial_2 F(u_1, u_2)$-t, ha

$$F(u_1, u_2) = f(g(u_1, u_2), h(u_1, u_2), k(u_1, u_2)),$$

és

(a) ♠ $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_3, \ g(u_1, u_2) = u_1u_2, h(u_1, u_2) = u_1, k(u_1, u_2) = u_1/u_2$,

(b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2x_3)^2, \ g(u_1, u_2) = \ln(u_1 + u_2), h(u_1, u_2) = u_1^2, k(u_1, u_2) = (u_1/u_2)^2$.

(59) ♠ Az $y^6 + y^5 - x^2 - x + 4 = 0$ egyenlet implicit módon meghatározza az $y = f(x)$ függvényt, és $f(2) = 1$. Határozza meg $f'(2)$-et!

(60) Az $2x^5 + 3xyz - 4z - 1 = 0$ egyenlet implicit módon meghatározza az $x = f(y, z)$ függvényt, $f(1, 1) = 1$. Határozza meg a $\partial_x f(x, y), \partial_y f(x, y)$ parciális deriváltakat! Számolja ki ezen parciális deriváltakat az $(1, 1)$ pontban is.

(61) ★ Az $2x^5 + 3xyz + 5z + u = 0, xyzu + 2e^y - 10x = 0$ egyenletek implicit módon meghatározzák az $x = f(z, u), y = g(z, u)$ függvényeket. Határozza meg a $\partial_z f(z, u), \partial_u f(z, u)$ parciális deriváltakat!

Közönséges és feltételes szélsőérték

(62) Határozza meg az alábbi függvények stacionárius pontjait és lokális szélsőérték helyeit, azok típusát és nagyságát.

(a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x - 2y - 1,\quad (x, y \in \mathbb{R});$

(b) ♠ $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2,\quad (x, y \in \mathbb{R});$

(c) $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2,\quad (x, y \in \mathbb{R});$

(d) ♠ $f(x,y) = \frac{20}{x} + \frac{50}{y} + xy,\quad (x > 0, y > 0);$

(e) $f(x,y) = e^{-(x^2-2xy+2y^2)},\quad (x, y \in \mathbb{R});$

(f) $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + y^2 + 5,\quad (x, y \in \mathbb{R});$

(g) $f(x,y) = x(x^2 + y - 1)^2,\quad (x, y \in \mathbb{R});$

(h) $f(x,y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y),\quad (x, y \in \mathbb{R});$

(k) ♠ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 75x - 12y + 7,\quad (x, y \in \mathbb{R});$

(l) ★ $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y,\quad (x > 0, y > 0).$

(63) Határozza meg az alábbi függvényeknek a megadott korlátos, zárt (kompakt) D halmazon felvett minimumát és maximumát!

(a) $f(x,y) = x - 2y - 3,\quad D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x, y, x+y \in [0,1] \};$

(b) ♠ $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 3x - 3y,\quad D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, y \geq 0, y \leq 2 - x \};$

(c) ♠ $f(x,y) = x^2 y(4 - x - y),\quad D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, y \geq 0, y \leq 6 - x \};$

(d) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2,\quad D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| \leq 1 \};$

(e) $f(x,y,z) = x + y + z,\quad D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \}.$

(64) ♠ Egy vállalat kétféle terméket gyárt, A-t és B-t. Tegyük föl, hogy x egységnyi A és y egységnyi B termelésének napi költsége

$$C(x,y) = 0,04x^2 + 0,01xy + 0,01y^2 + 4x + 2y + 500 \quad €.$$

Egységnyi A termék ára 15€, B ára 9€. Határozzuk meg x és y értékét úgy, hogy a profit maximális legyen.

(65) Tekintsük az $F(K,L) = 6K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$ termelési függvényt, K a felhasznált tőke, L a felhasznált munka. Egy egység áru előállítási költsége $p = 0,5$, a tőke egy egységének költsége $r = 0,1$. Egységnyi munka költsége (bérarány) $w = 1$. Maximalizáljuk a profitot. A profit kiszámítása

$$P(K,L) = pF(K,L) - rK - wL.$$

(66) ♠ Egy vállalatnak 3 üzeme van, amelyekben ugyanazt a terméket állítják elő. Legyenek x, y, z az előállított termékek száma rendre a három üzemben, melyek egy 2000 egységes megrendelést

elégítenek ki. A három üzem költségfüggvénye rendre

$$C_1(x) = 200 + \frac{1}{100}x^2,$$
$$C_2(x) = 200 + y + \frac{1}{300}y^3,$$
$$C_3(x) = 200 + 10z.$$

Az összköltség $C(x) = C_1(x) + C_2(x) + C_3(x)$. Minimalizáljuk a C függvényt.

(67) Határozza meg az alábbi függvények feltételes szélsőértékeit!

(a) ♠ $f(x,y) = x^2 + y^2$, ha $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$;

(b) ♠ $f(x,y) = x - 2y + 2z$, ha $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(c) $f(x,y) = x + y^2$, ha $x^2 + y^2 = 1$;

(d) $f(x,y) = xy$, ha $x^2 + y^2 = 1$;

(e) $f(x,y) = x + y$, ha $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ $(a > 0)$;

(f) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, ha $\frac{g}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ $(a > 0)$;

(h) $f(x,y) = 4x - y$, ha $x^2 - y^2 = 15$;

(i) $f(x,y) = xy^2z^3$, ha $x + 2y + 3z = a$ $(a > 0,\ x, y, z > 0)$;

(j) ★ $f(x,y) = xyz$, ha $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1$;

(k) ★ $f(x,y) = xyz$, ha $x + y + z = 5, xy + yz + zx = 8$.

(68) ♠ A közgazdász-hallgató Töhötöm 100 Ft egységárú virslire és 300 Ft egységáru sörre költi el (teljes egészében) 9.000 Ft zsebpénzét. Tudja, hogy hasznossági függvénye

$$U(x_1, x_2) = \frac{2}{3}\ln(x_1) + \frac{1}{3}\ln(x_2)$$

alakú, ahol x_1 a virsliből, x_2 a sörből vásárolt mennyiséget jelöli. Melyik termékből mennyit vásároljon Töhötöm, hogy U-t maximalizálja (az adott mellékfeltételek mellett)?