

DEBRECENI EGYETEM, INFORMATIKAI KAR

Feladatok a Gazdasági matematika II. tárgy gyakorlataihoz Lineáris algebra

♠ a megoldásra ajánlott feladatokat jelöli, e feladatokat a félév végére megoldottnak tekintjük

★ a nehezebb feladatokat jelöli

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér

- (1) Legyen $a = (-3, 4, 2)$, $b = (5, 0, -4)$, $c = (2, 7, 8)$. Határozzuk meg az $a - 3b + c$, $3a + b - 2c$, $5a + 4b - 6c$ vektorokat.
- (2) ♠ Legyen $4(x, y, z) + 5(-1, 2, 4) = (-1, 8, 32)$. Határozzuk meg az (x, y, z) vektort.
- (3) Lineárisan függetlenek-e a $(2, 3)$ és az $(5, 4)$ vektorok?
- (4) Igazoljuk, hogy az a_1, a_2, a_3 vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$ -ban. Számoljuk ki az x vektor koordinátáit ebben a bázisban, ha $a_1 = (2, -1, 3)$, $a_2 = (1, 4, -2)$, $a_3 = (-1, 0, 2)$, $x = (1, -1, 0)$.
- (5) Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ban az a_1, a_2, a_3 vektorok. Ha igen, akkor számoljuk ki az x vektor koordinátáit ebben a bázisban, ha $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 2)$, $a_3 = (1, 2, 3)$, $x = (6, 9, 14)$.
- (6) ♠ Számoljuk ki az a vektor hosszát, az a és b vektorok skaláris szorzatát, és az általuk bezárt szöveget, ha
 - (a) ♠ $a = (2, -1, 4)$, $b = (3, 5, 2)$;
 - (b) $a = (1, 0, 7)$, $b = (0, -2, 6)$;
 - (c) $a = (3, 4, 1)$, $b = (-2, 2, 6)$.
- (7) Határozzuk meg a következő vektorok által generált altér egy bázisát és dimenzióját
$$\begin{aligned}a_1 &= (2, 1, 3, -1) \\a_2 &= (-1, 1, -3, 1) \\a_3 &= (4, 5, 3, 1) \\a_4 &= (1, 5, -3, 1).\end{aligned}$$
- (8) Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^5$ vektortérben a megadott részhalmazok? Ha igen, akkor hány dimenziósak?
 - (a) ♠ $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 = x_5, x_2 = x_3 \}$
 - (b) $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \}$
 - (c) $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i = 2k \text{ páros szám } k \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, 5 \}$
 - (d) $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1, x_5 \in \mathbb{Q} \}$
 - (e) ♠ $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \}$

Mátrixok és determinánsok

- (9) ♠ Számítsa ki az AB , BA , AC , ABC , ADF , DF , G^2 , $3G^2 - 2G + 5G^0$ mátrixokat, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (10) Határozza meg az AX , $X^T A$ mátrixokat, ha

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ és (a) } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (11) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az A^n mátrixot!

- (12) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy $A^2 = A$!

- (13) ♠ Határozzuk meg az összes olyan X 2x2-es mátrixot, melyre $AX = XA$, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (14) ♠ Az első évben három cég A , B és C piaci részesedései rendre 20, 60, 20%. A második évben ez a következőképpen változik: A fogyasztóinak 85%-a nála maradt, 5%-a B -hez, 10%-a C -hez kerül, B fogyasztóinak 55%-a nála marad, 10%-a A -hoz, 35%-a C -hez kerül, míg C fogyasztóinak 85%-a nála marad, 10%-a A -hoz, 5%-a B -hez kerül. Írjuk fel a piaci részesedés-vektort, és jelöljük azt $s \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ -el. Tekintsük a

$$T = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,10 & 0,10 \\ 0,05 & 0,55 & 0,05 \\ 0,10 & 0,35 & 0,85 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Számoljuk ki a Ts vektort, mutassuk meg, hogy az éppen második év piaci részesedés vektora. Hogyan értelmezhető a $T^2s := T(Ts)$ vektor?

- (15) Az első évben három cég A , B és C piaci részesedései rendre 15, 40, 45%. A második évben ez a következőképpen változik: A fogyasztóinak 75%-a nála maradt, 15%-a B -hez, 10%-a C -hez kerül, B fogyasztóinak 90%-a nála marad, 5%-a A -hoz, 5%-a C -hez kerül, míg C fogyasztóinak 65%-a nála marad, 30%-a A -hoz, 5%-a B -hez kerül. Legyen a piaci részesedés-vektora $s \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Határozza meg a $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrixot úgy, hogy, Ts éppen második év piaci részesedés vektora legyen!

- (16) ♠ Egy cég 3 raktárban 4 féle terméket tárol. Az alábbi táblázat mutatja a tárolt mennyiségeket, az egyes termékek egységárait, a raktározás költségét, valamint a raktár befogadó képességét.

	T1	T2	T3	T4	költség (Ft/db)	Kapacitás
R1	10	4	10	5	200	30
R2	3	5	0	15	300	25
R3	15	9	10	40	150	80
Egys.ár(Ft/db)	200	100	300	50		

Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

- (a) Hány darabot tárolnak az egyes termékekből?
- (b) Mekkora az egyes raktárak szabad kapacitása?
- (c) Mennyi az egyes termékek raktározási költsége?
- (d) Mekkora értéket tárolnak az egyes raktárak?
- (17) Egy cég 4-féle terméket állít elő, melyhez 3-féle alapanyag szükséges. Az alábbi táblázat mutatja, hogy melyik termék előállításához hány egység szükséges az egyes alapanyagokból, továbbá tartalmazza a táblázat az egyes alapanyagok árát, valamint a kész termékek eladási árát.

	T1	T2	T3	T4	költség (Ft/db)
A1	1	2	5	1	100
A2	0	4	2	3	200
A3	2	3	5	4	300
Egys.ár(Ft/db)	400	600	500	400	

Az egyes termékekből rendre 10, 20, 30, 40 darabot állítunk elő. Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

- (a) Mennyi az egyes termékek előállítási költsége?
- (b) Mennyi a cég bevétele?
- (c) Mennyi a haszon az egyes termékeken?
- (d) Mennyi az összhaszon (profit)?
- (18) Egy üzemben importból beszerezett 5-féle alkatrészből 4-fajta végterméket szerelnek össze. Egy megfigyelt időszakban a V_1 termékből 50, a V_2 termékből 70, a V_3 termékből 32, a V_4 termékből 20 egységet állítanak elő. Az egyes termékek fajlagos alkatrész-szükségletét a következő táblázat mutatja:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
V_1	1	0	2	3	1
V_2	0	2	1	3	0
V_3	0	3	2	1	3
V_4	1	5	3	2	5

Az egyes alkatrészek beszerzési ára 3; 2; 5; 1; 4; 2 ezer Ft/darab. Válaszoljunk mátrixműveletek felhasználásával az alábbi kérdésekre:

- (a) Mekkora a termékek fajlagos alkatrészköltsége?
- (b) Az egyes alkatrészekből hány darabot kell importálni?
- (c) Mennyi a teljes importköltség?

(19) Számítsa ki a következő determinánsok értékét:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \spadesuit & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \\ \text{c) } \spadesuit & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}. \end{array}$$

(20) A kifejtési tétel alkalmazásával számítsa ki a következő determinánsok értékét:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \spadesuit & \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}. \end{array}$$

(21) Határozza meg az A mátrix determinánsát, ha az A mátrix a_{ij} eleme

a) $a_{ij} = \min(i, j)$,

b) $a_{ij} = \max(i, j)$.

(22) ♠ Határozzuk meg az x valós számot úgy, hogy

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & x \end{vmatrix} = 0, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x^2 & 2x-1 \\ 2x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

teljesüljön.

(23) Írja fel x polinomjaként az alábbi determinánsokat:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}.$$

(24) ♠ Határozza meg x -et, ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

(25) Mutassa meg kizárólag sorok (vagy oszlopok) egymásból való kivonásával, hogy

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix} = 0.$$

(26) Mikor invertálható az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix? Hogyan számíthatjuk ki az inverzét?

(27) Invertálhatók-e az alábbi mátrixok, és ha igen, határozza meg az inverzüket!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \spadesuit & \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}, & \text{b) } & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ \\ \text{c) } \spadesuit & \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, & \text{d) } & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \\ \text{e) } & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, & \text{f) } & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

(28) Mennyi az A mátrix rangja? Adja meg a sorvektorai által generált altér egy bázisát!

$$\text{a) } \spadesuit \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

(29) Milyen λ értékek mellett invertálhatók az alábbi mátrixok:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \spadesuit \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -12 \\ -2 & -3 & \lambda \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

(30) $\spadesuit$ Mutassa meg, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

mátrix invertálható, és határozza meg az $A \cdot X = B$ egyenlet összes $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ megoldását, ha

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -14 & 8 & -5 \\ 11 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

(31) $\spadesuit$ Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, ahol

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lineáris egyenletrendszerek

(32) Oldja meg Gauss eliminációval az alábbi lineáris homogén egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{ll} \spadesuit & \begin{array}{rrrr} 8x_1 & +2x_2 & +9x_3 & +5x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 8x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array} & \begin{array}{rrrr} 2x_1 & +x_2 & -4x_3 & & = & 0 \\ 3x_1 & +5x_2 & -7x_3 & & = & 0 \\ 4x_1 & -5x_2 & -6x_3 & & = & 0 \end{array} \\ \\ & \begin{array}{rrrr} 3x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 0 \end{array} & \begin{array}{rrrr} 9x_1 & +21x_2 & -15x_3 & +5x_4 & = & 0 \\ 12x_1 & +28x_2 & -20x_3 & +7x_4 & = & 0 \end{array} \end{array}$$

- (33) Oldja meg Gauss eliminációval az alábbi lineáris inhomogén egyenletrendszereket:

$$\spadesuit \begin{array}{rrrrr} 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & & = & 4 \end{array}, \quad \begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +5x_2 & -8x_3 & & = & 8 \\ 4x_1 & +3x_2 & -9x_3 & & = & 9 \\ 2x_1 & +3x_2 & -5x_3 & & = & 7 \\ x_1 & +8x_2 & -7x_3 & & = & 12 \end{array}.$$

- (34) $\spadesuit$ A Cramer szabállyal a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (35) $\spadesuit$ Milyen a, b mellett alkalmazható a Cramer szabály a következő lineáris egyenletrendszerre?

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Legyen $a = 1$, megválasztható-e (és ha igen, akkor hogyan) b úgy, hogy $x_1 = 4$ megoldása legyen az egyenletrendszernek?

- (36) Megoldhatók-e következő lineáris egyenletrendszerek? Ha igen oldjuk meg őket!

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -6 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & -4 \end{array}, \quad \spadesuit \begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 2 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & & = & 5 \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & & = & -7 \\ 2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & & = & 14 \end{array}.$$

- (37) Adjuk meg a következő lineáris egyenletrendszerek összes megoldását (a Cramer szabály felhasználásával)! Tudjuk, hogy az első rendszer mátrixának és bővített mátrixának rangja 2, de ha a (2,3) indexhez tartozó 1 elemet 3-ra változtatjuk, akkor az előbbi két rang 3-ra változik és a bal felső sarokdetermináns vehető rangmeghatározó determinánssá.

$$\spadesuit \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\spadesuit \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (38) $\spadesuit$ Tekintsük a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rrrr} 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & +\lambda x_2 & +4x_3 & = & 5 \\ 7x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = & k \end{array}.$$

- a) Legyen $k = 8$. λ milyen értékei esetén nincs megoldása az egyenletrendszernek?
b) Most legyen $\lambda = -2$. Milyen k esetén oldható meg az egyenletrendszer?

(39) Mátrixinvertálás segítségével oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 2x_3 & = & -3 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 15 \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 & = & -8 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 3 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 7 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 14. \end{array}$$

Lineáris leképezések, diagonalizálás

(40) ♠ Legyen a $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa (a természetes bázisra vonatkozóan)

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Határozzuk meg az $x = (1, 1, 2)$ vektor képét!

b) Határozzuk meg azt az x vektort, melynek képvektora az $y = (-2, -5, -5)$ vektor!

(41) Vizsgáljuk meg, hogy melyek diagonalizálhatók az alábbi mátrixok közül. A diagonalizálhatók esetében határozzuk meg azt az S mátrixot, amellyel $S^{-1}AS$ diagonális mátrix.

$$\spadesuit A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(42) Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\spadesuit A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 = 10) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(43) Diagonalizáljuk az alábbi szimmetrikus mátrixokat, azaz határozzunk meg olyan U ortogonális mátrixot, melyre $U^\top AU$ diagonális! (U oszlopvektorai a mátrix normált lin. független sajátvektorai)

$$\spadesuit A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\spadesuit A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(44) Határozzunk meg a következő kvadratikus formák kanonikus alakját és döntsük el hogy definitesség szempontjából milyenek!

a) ♠ $2x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2$

b) $9x_1^2 + 16x_2^2 + 24x_1x_2$

c) ♠ $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_2x_3$

d) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3$