Banach-algebrák, C^*-algebrák és Neumann-algebrák

(előadáskövető egyetemi jegyzet)

Molnár Lajos

Debreceni Egyetem
Matematikai és Informatikai Intézete
2000

Tartalomjegyzék

1 Banach-algebrák **1**

1.1 Alapfogalmak . . . 1
1.2 Invertálhatóság és a spektrum . . . 4
1.3 A holomorf függvénykalkulus . . . 8
1.4 A spektrum folytonossága . . . 14
1.5 Kommutatív Banach-algebrák Gelfand-elmélete . . . 18
1.6 Algebrák reprezentációi, a Jacobson-radikál . . . 30
1.7 Banach-algebrák reprezentációi . . . 34
1.8 Deriválók és automorfizmusok . . . 37

2 C^*-algebrák **43**

2.1 Alapfogalmak . . . 43
2.2 Kommutatív C^*-algebrák . . . 46
2.3 A folytonos függvénykalkulus . . . 46
2.4 A folytonos függvénykalkulus néhány alkalmazása . . . 49
2.5 A spektráltétel . . . 56
2.6 Pozitív lineáris funkcionálok . . . 65
2.7 *-reprezentációk . . . 69
2.8 C^*-algebrák ideáljai . . . 77
2.9 C^*-algebrák deriválói, automorfizmusai és szürjektív izometriái . . . 81
2.10 A Toeplitz-algebra és a BDF-elmélet . . . 84
2.11 AF algebrák . . . 92
2.12 Csoport C^*-algebrák . . . 97

3 Neumann-algebrák **106**

3.1 A gyenge és az erős operátortopológia . . . 106
3.2 A Neumann-féle második kommutáns tétel és a Kaplansky-féle sűrűségi tétel 109
3.3 Az $\mathbb{L}^\infty$-függvénykalkulus . . . 116
3.4 Kommutatív Neumann-algebrák . . . 123
3.5 Projekciók geometriája . . . 126
3.6 Neumann-algebrák osztályozása . . . 131
3.7 I. típusú Neumann-algebrák . . . 137
3.8 Faktorok . . . 142

1 Banach-algebrák

1.1 Alapfogalmak

1.1.1 . Definíció. Az $\mathcal{A}$ komplex algebrát Banach-algebrának nevezzük, ha adott rajta egy $\|.\|$ norma, mellyel $\mathcal{A}$ Banach-tér és teljesül, hogy

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \qquad (a, b \in \mathcal{A}).$$

Ha az $\mathcal{A}$ Banach-algebra egységelemes, egységeleme 1, akkor mindig feltehető, hogy $\|1\| = 1$. Létezik ugyanis olyan $\|.\|_0$ Banach-algebra norma $\mathcal{A}$-n, ami ekvivalens az eredeti normával, s melyre nézve az egységelem normája már valóban 1. Ennek belátásához tekintsük az

$$\|x\|_0 = \sup\{\|xy\| \,:\, \|y\| = 1\} \qquad (x \in \mathcal{A})$$

módon definiált normát ($\|x\|_0$ nem más mint az x elemmel való balról történő szorzás operátorának a normája). Világos, hogy

$$\frac{\|x\|}{\|1\|} \leq \|x\|_0 \leq \|x\| \qquad (x \in \mathcal{A}).$$

A továbbiakban, amennyiben egységelemes Banach-algebrát mondunk, azon olyan Banach-algebrát értünk ami mint algebra egységelemes és egységelemének normája 1.

Könnyen látható, hogy minden Banach-algebra beágyazható izometrikusan egységelemes Banach-algebrába. Ha ugyanis $\mathcal{A}$ nem egységelemes Banach-algebra, akkor tekintsük az $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ Descartes-szorzatot. Definiáljuk az összeadást és a skalárral való szorzást koordinátánként, valamint a szorzást az

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu) \qquad (a, b \in \mathcal{A}, \;\; \lambda, \mu \in \mathbb{C})$$

összefüggéssel. Végezetül pedig legyen $\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$. Egyszerű számolás mutatja, hogy ekkor $\tilde{\mathcal{A}}$ egységelemes Banach-algebra ($\tilde{\mathcal{A}}$ egységeleme a $(0, 1)$) és az $a \mapsto (a, 0)$ leképezés izometrikus algebra-homomorfizmusa $\mathcal{A}$-nak $\tilde{\mathcal{A}}$-ba.

1.1.2 . Megjegyzés. Természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy a fenti definícióban miért szorítkozunk csupán komplex algebrák vizsgálatára. Ennek oka, hogy, amint azt látni fogjuk az alábbiakban, a bizonyítások jelentős része komplex függvénytani eszközöket használ. Bár ezek közül némelyek átvihetők a valós esetre is, a következőkben csak komplex Banach-algebrákkal fogunk foglalkozni.

Az alábbiakban néhány fontos példát említünk Banach-algebrákra.

1.1.3. Példa. Legyen X Banach-tér. Ekkor az X korlátos lineáris operátorainak $B(X)$ algebrája az operátornormával egységelemes Banach-algebra. Világos, hogy $B(X)$ nem kommutatív, ha $\dim X > 1$.

1.1.4. Példa. Legyen K kompakt Hausdorff-tér. Ekkor $C(K)$, a K téren értelmezett komplexértékű folytonos függvények halmaza a pontonkénti műveletekkel és a sup-normával kommutatív egységelemes Banach-algebra.

1.1.5. Példa. Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér. Jelölje $C_0(X)$ azon $f : X \to \mathbb{C}$ folytonos függvények halmazát, melyekre minden pozitív ϵ-hoz létezik olyan $K_\epsilon \subset X$ kompakt halmaz, hogy $|f(x)| < \epsilon$ ha $x \in X \setminus K_\epsilon$. A $C_0(X)$ elemeit végtelenben eltűnő folytonos függvényeknek nevezzük. Hasonlóan a fentiekhez, $C_0(X)$ a pontonkénti műveletekkel és a sup-normával kommutatív Banach-algebra, ami kivéve azt az esetet amikor X kompakt, nem egységelemes.

1.1.6. Példa. Legyen $K \subset \mathbb{C}$ kompakt halmaz. Jelölje $P(K)$ illetve $R(K)$ azon $f : K \to \mathbb{C}$ folytonos komplex függvények halmazát, melyek K-n egyenletesen approximálhatók polinomokkal illetve racionális függvényekkel. Végezetül jelölje $A(K)$ azon folytonos komplex függvények halmazát K-n, melyek holomorfak K belsejében. Világos, hogy a pontonkénti műveletekkel és a sup-normával $P(K)$, $R(K)$ Banach-algebrák és $P(K) \subset R(K)$. Felhasználva Weierstrass egy jól ismert komplex függvénytani tételét, mely szerint nyílt halmazon holomorf függvények kompakt részhalmazokon egyenletesen konvergens sorozatának határértéke is holomorf, kapjuk az $R(K) \subset A(K)$ tartalmazást valamint azt, hogy $A(K)$ is Banach-algebra. A $P(K) = A(K)$ illetve $R(K) = A(K)$ összefüggések fennállásának vizsgálata a komplex függvények approximációelméletének egyik központi problémája.

Megjegyezzük még, hogy a $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ jelöléssel az $A(\mathbb{D})$ algebrát diskalgebrának szokás nevezni.

1.1.7. Példa. Legyen G lokálisan kompakt kommutatív csoport. Legyen μ Haar-mérték G Borel-halmazain. Ekkor $L^1(G)$ a pontonkénti összeadás és skalárral való szorzás valamint a konvolúció

$$(f * g)(x) = \int_G f(xy^{-1})g(y)\, d\,\mu(y) \qquad (x \in G)$$

műveletével és az L^1-normával kommutatív Banach-algebra. Az $L^1(G)$ ún. csoportalgebra pontosan akkor egységelemes ha G diszkrét.

1.1.8. Példa. Legyen W azon $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $f(0) = f(2\pi)$ folytonos függvények halmaza melyek Fourier-együtthatóinak sora abszolút konvergens. Egyszerűen belátható, hogy W elemei éppen azon $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ függvények, melyek előállnak $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ alakban valamely $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty} \in l_1(\mathbb{Z})$ esetén. Valóban, ha $f \in W$, akkor a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ sor egyenletesen konvergens és ennek összege olyan folytonos függvény, melynek Fourier-együtthatói megegyeznek f Fourier-együtthatóival. Így az egyértelműségi tétel miatt a fenti sorösszeg éppen f. Megfordítva, ha f előáll $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ alakban valamely $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty} \in l_1(\mathbb{Z})$ esetén, akkor kapjuk, hogy f Fourier-együtthatói éppen az a_n-nek, s így $f \in W$.

Tekintsük W elemei között a pontonkénti műveleteket (a szorzás tehát itt nem a konvolúció!). Ha $f, g \in W$, könnyen adódik, hogy

$$(fg)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\hat{f} * \hat{g})(n)e^{int} \quad (t \in [0, 2\pi]),$$

ahol $(\hat{f} * \hat{g})(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n-k)\hat{g}(k)$ $(n \in \mathbb{N})$, tehát az $\hat{f}$ illetve $\hat{g}$ mint $l^1(\mathbb{Z})$ elemei közötti konvolúció. Mivel $\hat{f}, \hat{g} \in l^1(\mathbb{Z})$-ből $\hat{f} * \hat{g} \in l^1(\mathbb{Z})$ következik, kapjuk, hogy $fg \in W$. Tehát W algebra. Világos továbbá, hogy az

$$f \longmapsto \hat{f}$$

leképezés algebra-izomorfizmusa W-nek $l^1(\mathbb{Z})$-re. Ha W-n a normát az $\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|$ összefüggéssel definiáljuk, akkor W egységelemes Banach-algebrává válik, amit Wiener-algebrának nevezünk.

1.1.9. Példa. Legyen $\mathcal{A}$ Banach-algebra és $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ zárt ideál. Ekkor az $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ algebra Banach-tér. Jelölje $^-$ a megfelelő mellékosztályokat $\mathcal{A}/\mathcal{I}$-ben. A faktor-norma definíciójából adódóan kapjuk, hogy tetszőleges $a, b \in \mathcal{A}$ és $\epsilon > 0$ esetén létezik olyan $j, k \in \mathcal{I}$, melyre $\epsilon + \|\overline{a}\|\|\overline{b}\| \geq \|a + j\|\|b + k\|$. Ezért

$$\epsilon + \|\overline{a}\|\|\overline{b}\| \geq \|a + j\|\|b + k\| \geq \|(a + j)(b + k)\| = \|ab + (jb + ak + jk)\| \geq \|\overline{ab}\| = \|\overline{a}\overline{b}\|.$$

Mivel ϵ tetszőleges volt, következik, hogy a faktor-norma szubmultiplikatív. Tehát $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ Banach-algebra.

Ha $\mathcal{A}$ egységelemes Banach-algebra az 1 egységelemmel és $\mathcal{I}$ valódi ideálja $\mathcal{A}$-nak, azaz $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{A}$, akkor a faktor-norma definíciója miatt $0 \neq \|\overline{1}\| \leq \|1\| = 1$. Másrészt, mivel $\overline{1}$ egységeleme az $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ algebrának, kapjuk, hogy $\|\overline{1}\| = \|\overline{1} \cdot \overline{1}\| \leq \|\overline{1}\|\|\overline{1}\|$. Így $1 \leq \|\overline{1}\|$, ahonnan az következik, hogy $\|\overline{1}\| = 1$. Tehát ekkor $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ egységelemes Banach-algebra.

A fejezet további részében, ha másként nem mondjuk, $\mathcal{A}$ mindig egységelemes Banach-algebrát jelöl.

1.2 Invertálhatóság és a spektrum

1.2.1. Tétel. *Legyen $x \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $\|x\| < 1$. Ekkor $1 - x$ invertálható és inverze az alábbi geometriai sorral adható meg*

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \textit{(Neumann-sor)}.$$

B i z o n y í t á s. Mivel $\|x^n\| \leq \|x\|^n$, így a $\sum_n x^n$ sor abszolút konvergens. Mivel $\mathcal{A}$ Banach-tér, ezért $\sum_n x^n$ konvergens is. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$(1-x)\sum_{n=0}^{m} x^n = 1 - x^{m+1} = \sum_{n=0}^{m} x^n(1-x).$$

Innen $m \to \infty$ határérték vételével $x^m \to 0$ miatt kapjuk az állítást.

1.2.2. Következmény. *Ha $x, y \in \mathcal{A}$, y invertálható és*

$$\|x - y\| < \frac{1}{\|y^{-1}\|},$$

akkor x is invertálható. Az $\mathcal{A}$ invertálható elemeinek $G(\mathcal{A})$ halmaza nyílt, és rajta az invertálás művelete homeomorfizmus.

B i z o n y í t á s. Az 1.2.1. Tételt fogjuk használni. Mivel

$$\|xy^{-1} - 1\| = \|(x-y)y^{-1}\| \leq \|x-y\|\|y^{-1}\| < 1,$$

ezért xy^{-1}, és így x is invertálható. Az ezek után már nyilvánvaló, hogy $G(\mathcal{A})$ nyílt halmaz. Mivel

$$x^{-1} = y^{-1}(xy^{-1})^{-1} = y^{-1}(1-(1-xy^{-1}))^{-1} = y^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(1-xy^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} y^{-1}(1-xy^{-1})^n$$

ezért

$$x^{-1} - y^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} y^{-1}(1-xy^{-1})^n = \sum_{n=1}^{\infty} y^{-1}((y-x)y^{-1}))^n.$$

Innen következik, hogy

$$\|x^{-1} - y^{-1}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|y^{-1}\|^{n+1}\|y-x\|^n.$$

Tekintsük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y^{-1}\|^{n+1} z^n$$

hatványsort. Ennek konvergenciasugara $1/\|y^{-1}\|$. Ezen hatványsor 0-ban való folytonosságából kapjuk az invertálás műveletének az y pontban való folytonosságát. Mivel y tetszőleges invertálható elem volt, ezért az invertálás művelete folytonos. Nyilvánvaló, hogy az $x \mapsto x^{-1}$ leképezés inverze önmaga, s így adódik a homeomorfiára vonatkozó állítás.

1.2.3. Definíció. *Ha $x \in \mathcal{A}$, akkor x spektrumán a*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, (x - \lambda 1) \text{ nem invertálható}\}$$

halmazt értjük.

1.2.4. Példa. Ha $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$, a komplex $n \times n$-es matrixok algebrája, akkor egy tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ elem spektruma az A matrix sajátértékeinek halmazával egyezik meg.

Legyen H végtelen dimenziós Hilbert tér és $\mathcal{A} = B(H)$. Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor A spektruma természetesen tartalmazza A sajátértékeit, de tartalmazhat további skalárokat is. Ha például $H = l^2(\mathbb{N})$ és A az unilaterális shift, akkor A-nak nincs sajátértéke, de belátható, hogy $\sigma(A) = \mathbb{D}$.

Legyen K kompakt Hausdorff-tér és legyen $\mathcal{A} = C(K)$. Ha $f \in \mathcal{A}$, akkor $\sigma(f)$ megegyezik f értékkészletével. Ez abból következik, hogy $C(K)$ egy eleme pontosan akkor invertálható ha seholsem 0.

1.2.5. Tétel. *Ha $x \in \mathcal{A}$, akkor x spektruma a komplex számsík nemüres kompakt részhalmaza.*

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \sigma(x)$. Azt állítjuk, hogy $|\lambda| \leq \|x\|$. Valóban, ha $|\lambda| > \|x\|$, akkor x/λ normája 1-nél kisebb, s így az 1.2.1. Tétel miatt $(1 - x/\lambda)$ invertálható. De ekkor ennek λ-szorosa, $\lambda 1 - x$ is invertálható, ami ellentmondás. Tehát $\sigma(x)$ korlátos halmaz. Mivel az invertálható elemek halmaza nyílt, így a neminvertálhatóké zárt. A $\lambda \mapsto x - \lambda 1$ függvény folytonossága miatt kapjuk a $\sigma(x)$ halmaz zártságát. Ebből következik a spektrum kompaktsága.

Azt kell még belátnunk, hogy $\sigma(x)$ nem lehet üres. Ehhez tekintsük a

$$r_x : \lambda \longmapsto (x - \lambda 1)^{-1}$$

módon értelmezett rezolvensfüggvényt a $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ halmazon. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$r_x(\mu) - r_x(\lambda) = (\mu - \lambda) r_x(\mu) r_x(\lambda) \qquad \text{(rezolvens-azonosság)}$$

ha $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Átosztva $(\mu - \lambda)$-val, majd $\mu \to \lambda$ határérték vételével adódik, hogy r_x differenciálható λ-ban és $r_x'(\lambda) = r_x(\lambda)^2$. Ezért r_x egy $\mathcal{A}$-beli értékű holomorf függvény

a $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ halmazon.

Tegyük fel, hogy $\sigma(x) = \emptyset$. Ekkor r_x egész függvény. Belátjuk, hogy r_x ráadásul még korlátos is. Ha $|\lambda| > 2\|x\|$, akkor

$$(x - \lambda 1)^{-1} = -\lambda^{-1}(1 - x/\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n$$

miatt kapjuk, hogy

$$\|r_x(\lambda)\| \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right|\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^n \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\left|\frac{1}{\lambda}\right|.$$

Tehát r_x korlátos az origó középpontú, $2\|x\|$ sugarú zárt körlapon kívül. De ezen a zárt körlapon is kapjuk a korlátosságot, mivel r_x folytonos. Tehát az r_x rezolvensfüggvény korlátos egész függvény, ami Liouville tétele miatt konstans kell hogy legyen. Ez viszont nyilvánvaló ellentmondás. Innen adódik a spektrum nemüres volta.

1.2.6. Definíció. Ha $x \in \mathcal{A}$, akkor x spektrálsugarán az

$$r(x) = \sup\{|\lambda| \,:\, \lambda \in \sigma(x)\} = \max\{|\lambda| \,:\, \lambda \in \sigma(x)\}$$

számot értjük.

1.2.7. Lemma. *Legyen $x \in \mathcal{A}$ és P komplex polinom. Ekkor*

$$\sigma(P(x)) = P(\sigma(x)).$$

Bizonyítás. Tekintsük a $P(x) - \lambda 1$ elemet. A $P(z) - \lambda$ polinom felírható

$$P(z) - \lambda = a(z - \lambda_1)\dots(z - \lambda_n), \quad a \neq 0$$

alakban. Ezért

$$P(x) - \lambda 1 = a(x - \lambda_1 1)\dots(x - \lambda_n 1).$$

Mivel a jobb oldalon álló tényezők egymással felcserélhetők, így könnyen adódik, hogy $P(x) - \lambda 1$ pontosan akkor invertálható, ha az $(x - \lambda_1 1), \dots, (x - \lambda_n 1)$ elemek mindegyike invertálható. Ez egyenértékű azzal, hogy a $P(z) - \lambda$ polinom gyökei nem elemei $\sigma(x)$-nek, ami pontosan azt jelenti, hogy $\lambda \notin P(\sigma(x))$. Az állítás innen nyilvánvaló.

1.2.8. Tétel. (Spektrálsugár formula) *Ha $x \in \mathcal{A}$, akkor*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n} = \inf_n \|x^n\|^{1/n} \qquad \textit{(Beurling-Gelfand formula).}$$

B i z o n y í t á s. Az 1.2.5. Tétel bizonyításából tudjuk, hogy $r(x) \leq \|x\|$. Az előző lemmából kapjuk, hogy

$$r(x)^n = r(x^n) \leq \|x^n\|.$$

Tetszőleges $f \in \mathcal{A}^*$ esetén tekintsük a $\lambda \mapsto f(r_x(\lambda)) = f((x - \lambda 1)^{-1})$ függvényt a $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ nyílt halmazon. Mivel a rezolvensfüggvény differenciálható, kapjuk a fenti függvény holomorf voltát. Innen adódik, hogy függvényünk Laurent-sorba fejthető a $|\lambda| > r(x)$ módon definiált nyílt körgyűrűn. Az 1.2.1. Tétel miatt, hasonlóan mint az 1.2.5. Tétel bizonyításában, kapjuk, hogy $|\lambda| > \|x\|$ esetén

$$(x - \lambda 1)^{-1} = -\lambda^{-1}(1 - x/\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{\lambda})^n.$$

Innen következik az

$$f((x - \lambda 1)^{-1}) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(x^n)}{\lambda^n}$$

összefüggés ($|\lambda| > \|x\|$). Mivel a Laurent-sorbafejthetőség fennáll $|\lambda| > r(x)$ esetén is, a Laurent-sor együtthatóinak egyértelműségéből kapjuk a fenti egyenlőséget minden $|\lambda| > r(x)$-re is. Mivel konvergens számsor tagjainak sorozata korlátos, következik, hogy $\sup_n |\frac{f(x^n)}{\lambda^n}| < \infty$ minden $f \in \mathcal{A}^*$ esetén. Ebből az egyenletes korlátosság tételét alkalmazva adódik, hogy

$$\sup_n \|x^n\|/|\lambda^n| < \infty \qquad (|\lambda| > r(x)).$$

Ezért tetszőleges λ komplex számhoz, amire $|\lambda| > r(x)$, létezik olyan M pozitív szám, hogy $\|x^n\|/|\lambda^n| < M$ minden n esetén. Ebből kapjuk, hogy

$$\|x^n\|^{1/n} \leq M^{1/n}|\lambda|,$$

amiből

$$\limsup_n \|x^n\|^{1/n} \leq |\lambda|$$

következik. A λ tetszőlegessége és a bizonyítás első része miatt kapjuk, hogy

$$r(x) \leq \inf_n \|x^n\|^{1/n} \leq \liminf_n \|x^n\|^{1/n} \leq \limsup_n \|x^n\|^{1/n} \leq r(x),$$

amivel a bizonyítás teljes.

1.2.9. Példa. A spektrálsugár formula alkalmazásaként megmutatjuk, hogy a $C[0,1]$ téren értelmezett Volterra-féle integráloperátor kvázinilpotens, azaz spektruma $\{0\}$.

Legyen $T : C[0,1] \to C[0,1]$ a következőképpen definiált:

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s)d\,s, \qquad (t \in [0,1]\,, f \in C[0,1]).$$

Ekkor T korlátos lineáris operátor $C[0,1]$-en, amit Volterra-féle integráloperátornak nevezünk. Megjegyezzük, hogy az Arzela-Ascoli tételből egyszerűen adódik, hogy T a $C[0,1]$ egységgömbjét relatív kompakt halmazba képezi, azaz T kompakt. Könnyen belátható, hogy

$$|(T^n f)(t)| \leq t^n/n! \qquad (t \in [0,1])$$

a $C[0,1]$ egységgömbjének valamennyi f elemére. Innen kapjuk, hogy $\|T^n\| \leq 1/n!$, amiből a spektrálsugár formulát alkalmazva adódik az $r(T) = 0$ összefüggés.

1.2.10. Tétel. (Gelfand-Mazur) *Ha $\mathcal{A}$ minden 0-tól különböző eleme invertálható, akkor $\mathcal{A}$ izometrikusan izomorf $\mathbb{C}$-vel.*

Bizonyítás. A spektrum nemüres voltából és a tétel feltételéből adódik, hogy minden $x \in \mathcal{A}$ esetén egyértelműen létezik olyan $\lambda_x \in \mathbb{C}$ skalár, hogy $x = \lambda_x 1$. Nyilvánvaló, hogy az $x \mapsto \lambda_x$ leképezés izometrikus izomorfizmusa $\mathcal{A}$-nak $\mathbb{C}$-re.

1.3 A holomorf függvénykalkulus

1.3.1. Állítás. *Legyen X Banach-tér, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ pálya (azaz korlátos változású folytonos függvény), $f : \gamma^* \to X$ pedig folytonos függvény (γ^* a γ értékkészletét jelöli). Ekkor egyértelműen létezik olyan $\int_\gamma f(z)d\,z$-vel jelölt eleme X-nek, melyre*

$$x^*\Big(\int_\gamma f(z)d\,z\Big) = \int_\gamma x^*(f(z))d\,z \qquad (x^* \in X^*).$$

Bizonyítás. Vegyük az $[a,b]$ intervallumnak egy finomodó normális beosztássorozatát. Képezzük a

$$\sum_i f(\gamma(\xi_i))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$$

alakú közbeeső integrálközelítő összegeket. Könnyen belátható, hogy ezek Cauchy-sorozatot alkotnak, aminek ezért létezik határértéke. Ez a határérték elvileg függhetne a beosztássorozat választásától. Ez azonban nem áll fenn mivel a komplex függvények pályamenti integráljának tulajdonságaiból következik, hogy minden korlátos lineáris funkcionál a fellépő határértékeken ugyanazt az értéket veszi fel. A Hahn-Banach tételből kapjuk a fenti sorozat határértékének egyértelműségét. Az állítás visszamaradó része nyilvánvaló.

1.3.2. Definíció. Az előző állítás feltételei és jelölései mellett az $\int_\gamma f(z)d\,z \in X$ vektort az f függvény γ pálya menti integráljának nevezzük. Lánc menti integrálon a láncot alkotó pályák menti integrálok összegét értjük.

1.3.3. Megjegyzés. Világos, hogy a fentiekben bevezetett integrál lineáris transzformáció, továbbá ha X Banach-algebra, akkor az integráljel mögül az X-beli elemmel való szorzás kiemelhető. Könnyen adódik a

$$\Big\| \int_\gamma f \Big\| \leq \max\{\|f(z)\| \,:\, z \in \gamma^*\} \mathrm{V}_a^b(\gamma)$$

egyenlőtlenség is.

1.3.4. Definíció. Legyen $K \subset D \subset \mathbb{C}$, K kompakt, D nyílt és tegyük fel, hogy Γ olyan ciklus (zárt pályák lánca) $D \setminus K$-ban, melyre vonatkozó indexfüggvényre

$$\operatorname{ind}_\Gamma(z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } z \notin D \\ 1 & \text{ha } z \in K. \end{cases}$$

Ekkor azt mondjuk, hogy Γ olyan ciklus D-ben, ami körülveszi K-t.

1.3.5. Tétel. *Legyen $K \subset D \subset \mathbb{C}$, K kompakt és D nyílt. Ekkor létezik olyan ciklus D-ben, ami körülveszi K-t.*

B i z o n y í t á s. Legyen Φ síkbeli irányított szakaszok egy véges halmaza. Ha a sík minden pontja Φ ugyanannyi elemének kezdőpontja, mint ahánynak végpontja, akkor azt mondjuk, hogy Φ kiegyensúlyozott. Könnyű látni, hogy ekkor Φ ciklus.

A tétel bizonyítására térve legyen $2d$ a K távolsága $\mathbb{C} \setminus D$-től. Tekintsük $\mathbb{C}$-n a $kd + ild$ alakú elemek halmazát ($k, l \in \mathbb{Z}$), illetve az ezek által meghatározott d oldalhosszúságú zárt négyzeteket. Legyenek $Q_1, ..., Q_m$ azon négyzetek, melyek belemetszenek K-ba. Világos, hogy $Q_r \subset D$ ($r = 1, ..., m$). Jelölje ∂Q_r a Q_r határának pozitív irányban történő bejárását, és a megfelelő élek legyenek rendre $\gamma_{r1}, ..., \gamma_{r4}$. Legyen Φ a γ_{rk}-k halmaza, amiről látható, hogy kiegyensúlyozott. Távolítsuk most el Φ azon elemeit, melyeknek ellentetje (ugyanazon szakasz, de ellentétes irányítással) is eleme Φ-nak. Jelölje a visszamaradó elemek halmazát Γ, ami ugyancsak kiegyensúlyozott, s így ciklus. Könnyű látni, hogy Γ eleget tesz a tételben támasztott feltételnek.

1.3.6. Tétel. *Legyen $x \in \mathcal{A}$ és $\sigma(x) \subset D \subset \mathbb{C}$, D nyílt halmaz. Ha Γ_1 és Γ_2 két olyan ciklus D-ben, melyek körül veszik $\sigma(x)$-et, akkor*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - x} d\, z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z - x} d\, z$$

tetszőleges $f \in H(D)$ esetén.

Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy a tételbeli képletben szereplő

$$\frac{f(z)}{z-x}$$

kifejezést pontosabban az $f(z)(z1-x)^{-1} = -f(z)r_x(z)$ alakban kellene írnunk. Itt is és a továbbiakban is élünk a fenti szimbólikus írásmóddal. Vegyük észre, hogy a tételben szereplő integrandus folytonos függvény, így a pályamenti integrálok léteznek.

B i z o n y í t á s. A tétel egyszerűen adódik a Cauchy-féle integráltétel homológ változatának a $D \setminus \sigma(x)$ nyílt halmazra és a $\Gamma_1 \cup (-\Gamma_2)$ ciklusra való alkalmazásából.

1.3.7. Lemma. *Legyen $x \in \mathcal{A}$, $\sigma(x) \subset D \subset \mathbb{C}$, D nyílt halmaz, Γ egy D-beli ciklus, amely körülveszi $\sigma(x)$-et. Ekkor*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(z-z_0)^n}{z-x}d\,z = (x-z_0)^n \qquad (z_0 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Hasonló állítás igaz negatív n-ekre is, ha $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$.

B i z o n y í t á s. Világos, hogy

$$(x-z_0)(z-x)^{-1} = (x-z+z-z_0)(z-x)^{-1} = -1 + (z-z_0)(z-x)^{-1}.$$

Ha I_n jelöli a tételben szereplő összefüggés bal oldalát, akkor ebből azonnal kapjuk, hogy

$$(x-z_0)I_n = I_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2...)$$

Így elegendő megmutatni, hogy $I_0 = 1$. Legyen $r > \|x\|$ tetszőleges valós szám és jelölje γ az origó középpontú, r sugarú körpályát. Ekkor az előző tétel miatt

$$I_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-x}d\,z.$$

Ez utóbbi integrálról viszont sorfejtéssel könnyen megmutatható, hogy egyenlő 1-gyel. Valóban, mivel

$$(z-x)^{-1} = \frac{1}{z}\big(1-\frac{x}{z}\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{z^{n+1}}$$

és a fenti függvénysor $r > \|x\|$ miatt egyenletesen konvergens a γ értékkészletén, így

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-x}d\,z = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z^{n+1}}d\,z = 1.$$

1.3.8. Tétel. *Legyen $x \in \mathcal{A}$, $\sigma(x) \subset D \subset \mathbb{C}$, D nyílt halmaz, Γ egy D-beli ciklus, amely körülveszi $\sigma(x)$-et és legyen*

$$R(z) = P(z) + \sum_{m,k} c_{m,k}(z - z_m)^{-k}$$

racionális törtfüggvény, melynek pólusai D komplementumába esnek. Ekkor a

$$R(x) = P(x) + \sum_{m,k} c_{m,k}(x - z_m)^{-k}$$

jelöléssel

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{R(z)}{z - x} d\, z.$$

B i z o n y í t á s. Az 1.3.7. Lemma felhasználásával azonnal adódik.

1.3.9. Definíció. Ha $x \in \mathcal{A}$, $\sigma(x) \subset D \subset \mathbb{C}$, D nyílt halmaz és Γ ciklus D-ben, ami körülveszi $\sigma(x)$-et, akkor tetszőleges $f \in H(D)$ esetén legyen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - x} d\, z.$$

1.3.10. Megjegyzés. Az 1.3.6. Tétel miatt kapjuk, hogy a fenti definícióban szereplő $f(x)$ elem nem függ a D nyílt halmaztól és a Γ ciklustól.

1.3.11. Tétel. (Riesz-féle holomorf függvénykalkulus) *Legyen $x \in \mathcal{A}$ és $\sigma(x) \subset D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz. Ekkor*

(1) az $f \mapsto f(x)$ leképezés folytonos algebra-homomorfizmusa $H(D)$-nek $\mathcal{A}$-ba ($H(D)$ topológiája a D kompakt részhalmazain egyenletes konvergencia topológiája);

(2) $1(x) = 1$*;*

(3) $\mathrm{id}(x) = x$*;*

(4) ha $f(z) = \sum_n c_n z^n$ $(z \in D)$, akkor $f(x) = \sum_n c_n x^n$.

Továbbá, ha $\tau : H(D) \to \mathcal{A}$ egy folytonos algebra-homomorfizmus, melyre $\tau(1) = 1$ és $\tau(\mathrm{id}) = x$, akkor $\tau(f) = f(x)$ minden $f \in H(D)$ esetén.

B i z o n y í t á s. Az $f \mapsto f(x)$ leképezés nyilvánvalóan lineáris. Mivel

$$\|f(x)\| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{\Gamma^*} \sup_{z \in \Gamma^*} \|(z - x)^{-1}\| \mathrm{V}\,(\Gamma),$$

ahol $\|f\|_{\Gamma^*}$ jelöli az f sup-normáját a Γ^* halmazon és $\sup_{z\in\Gamma^*}\|(z-x)^{-1}\| < \infty$ a rezolvensfüggvény folytonossága miatt, így a fenti becslés figyelembevételével, ha $f_n \to f$ a $H(D)$ függvénytérben (azaz a D kompakt részhalmazain egyenletesen), akkor $f_n(x) \to f(x)$. Innen kapjuk a folytonosságot. Könnyen látható, hogy az $f \mapsto f(x)$ leképezés multiplikatív a racionális törtfüggvények által alkotott részalgebráján $H(D)$-nek. Innen a folytonosság illetve Runge tétele miatt (ami azt mondja, hogy a $H(D)$-beli racionális törtfüggvényekből álló részalgebra sűrű $H(D)$-ben) adódik (1). A tétel (2), (3) része nyilvánvaló az 1.3.8. Tétel miatt. A (4) állításhoz megjegyezzük, hogy mivel a szereplő hatványsor konvergens D pontjaiban, így ő egyenletesen konvergens D kompakt részhalmazain. Ezt és az (1)-beli folytonossági tulajdonságot alkalmazva kapjuk (4)-et.

A tétel utolsó része a következőképpen látható be. Először megmutatjuk, hogy $\tau(R) = R(x)$ minden $R \in H(D)$ racionális törtfüggvényre, majd alkalmazzuk Runge tételét.

1.3.12. Definíció. Az előző tétel feltételei és jelölései mellett az $f \mapsto f(x)$ leképezést az $x \in \mathcal{A}$ elemhez tartozó Riesz-féle holomorf függvénykalkulusnak nevezzük.

1.3.13. Megjegyzés. Legyen X kompakt Hausdorff-tér és tekintsük a $C(X)$ Banach-algebrát. Az 1.3.11. Tételnek a holomorf függvénykalkulus egyértelműségére vonatkozó részét alkalmazva kapjuk, hogy tetszőleges $x \in C(X)$ elemhez tartozó holomorf függvénykalkulus nem más mint az $f \mapsto f \circ x$ leképezés ($f \in H(D)$, ahol D az x értékkészletét tartalmazó tetszőleges nyílt halmaz).

1.3.14. Tétel. (Spektrálleképezési tétel) *Legyen $x \in \mathcal{A}$ és $\sigma(x) \subset D \subset \mathbb{C}$, D nyílt halmaz. Ekkor*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$$

tetszőleges $f \in H(D)$ esetén. Továbbá

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

ahol $\sigma(f(x)) \subset \tilde{D} \subset \mathbb{C}$, $\tilde{D}$ nyílt halmaz, $g \in H(\tilde{D})$ és $f(D) \subset \tilde{D}$.

Bizonyítás. Legyen $f \in H(D)$ és $\lambda \in \mathbb{C}$. Ha $f(z)-\lambda$ seholsem 0 a $\sigma(x)$-en, akkor van olyan g holomorf függvény a $\sigma(x)$ egy D' környezetében, melyre $(f(z)-\lambda)g(z) = 1$ a D'-n. A holomorf függvénykalkulus multiplikativitása miatt kapjuk, hogy $(f(x)-\lambda 1)g(x) = g(x)(f(x)-\lambda 1) = 1$, ahonnan következik, hogy $f(x)-\lambda 1$ invertálható.

Tegyük most fel, hogy $f(z)-\lambda$ eltűnik a $\sigma(x)$ valamely z_0 pontjában. Ekkor van olyan $g \in H(D)$ függvény, melyre $f(z)-\lambda = (z-z_0)g(z)$ a D minden pontjában. Innen kapjuk, hogy $f(x)-\lambda 1 = (x-z_0 1)g(x) = g(x)(x-z_0 1)$. Mivel $x - z_0 1$ nem invertálható,

ezért $f(x) - \lambda 1$ sem invertálható. Összefoglalva, $\lambda \notin f(\sigma(x))$ akkor és csak akkor ha $\lambda \notin \sigma(f(x))$.

A tétel második állítása abból következik, hogy a $g \mapsto (g \circ f)(x)$ $(g \in H(\tilde{D}))$ leképezés rendelkezik az $f(x) \in \mathcal{A}$ elemhez tartozó holomorf függvénykalkulusnak az 1.3.11. Tételben szereplő (1)-(3) tulajdonságaival, s így az említett tétel egyértelműségi részéből következően kapjuk az állítást.

1.3.15. Megjegyzés. A fenti tételből adódik a holomorf függvénykalkulus egyfajta injektivitása, nevezetesen, ha f, g holomorf függvények az $x \in \mathcal{A}$ spektrumának egy környezetében úgy, hogy $f(x) = g(x)$, akkor $f = g$ a $\sigma(x)$-en. Valóban, ha $(f-g)(x) = 0$, akkor $(f-g)(\sigma(x)) = \sigma((f-g)(x)) = \sigma(0) = \{0\}$ és innen következik, hogy $f = g$ a $\sigma(x)$-en.

1.3.16. Tétel. *Legyen $x \in \mathcal{A}$ és $\lambda \notin \sigma(x)$. Ekkor*

$$\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(x)) = \frac{1}{r((x-\lambda 1)^{-1})}.$$

B i z o n y í t á s. Legyen D egy nyílt környezete $\sigma(x)$-nek, ami nem tartalmazza λ-t. Ekkor a $z \mapsto 1/(z-\lambda)$ függvény holomorf D-n és

$$\sigma((x-\lambda 1)^{-1}) = \Big\{\frac{1}{z-\lambda} \,:\, z \in \sigma(x)\Big\}.$$

Innen kapjuk, hogy

$$r((x-\lambda 1)^{-1}) = \sup\Big\{\Big|\frac{1}{z-\lambda}\Big| \,:\, z \in \sigma(x)\Big\} = \frac{1}{\inf_{z\in\sigma(x)} |z-\lambda|}.$$

Reciprokot véve adódik az állítás.

1.3.17. Tétel. *Legyen $x \in \mathcal{A}$ olyan, melyre 0 eleme a $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ nemkorlátos komponensének. Ekkor létezik olyan $y \in \mathcal{A}$, melyre $x = e^y$. Továbbá tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $z \in \mathcal{A}$, melyre $z^n = x$.*

B i z o n y í t á s. A tétel feltételeiből következik, hogy létezik olyan D egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, ami tartalmazza x spektrumát, de nem tartalmazza a 0-t. A komplex függvénytanból tudjuk, hogy ilyen halmazon van logaritmuság, azaz létezik olyan $f \in H(D)$ holomorf függvény, melyre e^f az identitás D-n. Az 1.3.14. Tétel második részéből adódik, hogy $e^{f(x)} = x$. Legyen $y = f(x)$, míg az állítás második részéhez válasszuk $z = y/n$-et.

1.3.18. Definíció. Jelölje $\exp(\mathcal{A})$ az összes véges $e^{x_1} \cdot \ldots \cdot e^{x_n}$ $(x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{A})$ szorzat halmazát. Az $\mathcal{A}$ invertálható elemeinek $G(\mathcal{A})$ topológikus terében az 1 komponensét a $G(\mathcal{A})$ főkomponensének nevezzük és $G_1(\mathcal{A})$-val jelöljük.

1.3.19 . Tétel. (Lorch) $G_1(\mathcal{A}) = \exp(\mathcal{A})$.

B i z o n y í t á s. Azt mutatjuk meg, hogy $\exp(\mathcal{A})$ nyílt-zárt részhalmaza $G_1(\mathcal{A})$-nak. Mivel az $\exp(\mathcal{A})$ minden eleme összeköthető az egységelemmel egy $G(\mathcal{A})$-beli görbén keresztül (a $\lambda \mapsto e^{\lambda x}$ egy görbe, ami összeköti e^x-et 1-gyel), így $\exp(\mathcal{A}) \subset G_1(\mathcal{A})$.

Legyen $a \in \exp(\mathcal{A})$ és $x \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $\|x - a\| < 1/\|a^{-1}\|$. Ekkor $\|a^{-1}x - 1\| < 1$ és így $r(a^{-1}x - 1) < 1$. Ebből következik, hogy $a^{-1}x$ spektruma benne van az 1 körüli 1-sugarú nyílt körlapban. Ezen D körlapon van logaritmuság, tehát létezik olyan f holomorf függvény, melyre e^f az identikus függvény D-n. Innen következik az $y = f(a^{-1}x)$ jelöléssel, hogy $e^y = a^{-1}x$, s mivel $a \in \exp(\mathcal{A})$, kapjuk, hogy $x \in \exp(\mathcal{A})$. Ebből adódik az $\exp(\mathcal{A})$ halmaz nyíltsága (az egész $\mathcal{A}$-ban is).

Legyen most $a_n \in \exp(\mathcal{A})$ egy sorozat, ami konvergál az $x \in G(\mathcal{A})$ elemhez. Ekkor az invertálás folytonossága miatt kapjuk, hogy $a_n^{-1}x \to 1$. Így elég nagy n-re $\|1 - a_n^{-1}x\| < 1$, s a bizonyítás első részéhez hasonlóan kapjuk, hogy $e^y = a_n^{-1}x$ valamely $y \in \mathcal{A}$ esetén. Ebből következik, hogy $x \in \exp(\mathcal{A})$. Ezért $\exp(\mathcal{A})$ zárt is $G_1(\mathcal{A})$-ban. A bizonyítás $G_1(\mathcal{A})$ összefüggősége miatt teljes.

1.4 A spektrum folytonossága

1.4.1 . Definíció. Legyenek $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}$ kompakt halmazok. A K_1 és K_2 Hausdorff-távolságán a

$$\Delta(K_1, K_2) = \max\{\sup_{\lambda \in K_1} d(\lambda, K_2), \sup_{\lambda \in K_2} d(\lambda, K_1)\}$$

mennyiséget értjük. Belátható, hogy a Hausdorff-távolság metrika $\mathbb{C}$ kompakt részhalmazainak halmazán.

Tetszőleges $K \subset \mathbb{C}$ halmaz és $\epsilon > 0$ szám esetén jelölje

$$B_\epsilon(K) = \{\lambda : d(\lambda, K) < \epsilon\}, \qquad \overline{B}_\epsilon(K) = \{\lambda : d(\lambda, K) \le \epsilon\},$$

mely halmazokat a K halmaz ϵ-sugarú nyílt illetve zárt környezetének nevezzük.

Könnyű látni, hogy $\Delta(K_1, K_2) < \epsilon$ akkor és csak akkor teljesül, ha $K_1 \subset B_\epsilon(K_2)$ és $K_2 \subset B_\epsilon(K_1)$. Hasonlóan, $\Delta(K_1, K_2) \le \epsilon$ akkor és csak akkor, ha $K_1 \subset \overline{B}_\epsilon(K_2)$ és $K_2 \subset \overline{B}_\epsilon(K_1)$.

1.4.2 . Tétel. *Legyen $x, y \in \mathcal{A}$ felcserélhető. Ekkor*

$$\sigma(y) \subset \overline{B}_{r(x-y)}(\sigma(x)).$$

Továbbá $\Delta(\sigma(x), \sigma(y)) \le r(x - y) \le \|x - y\|$. Ezért kommutatív Banach-algebrán a spektrum egyenletesen folytonos függvény.

B i z o n y í t á s. Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan $\lambda \in \sigma(y)$, melyre $d(\lambda, \sigma(x)) > r(x-y)$. Ekkor az 1.3.16. Tétel miatt $1 > r((x-\lambda 1)^{-1})r(x-y)$. A spektrálsugár formula alapján könnyű látni, hogy felcserélhető elemeken a spektrálsugár szubmultiplikatív. Így kapjuk, hogy $1 > r((x-\lambda 1)^{-1}(x-y))$. Innen

$$1 > r((x-\lambda 1)^{-1}(x-y)) = r((x-\lambda 1)^{-1}((x-\lambda 1)-(y-\lambda 1))) =$$

$$r(1-(x-\lambda 1)^{-1}(y-\lambda 1)).$$

Ezen egyenlőtlenség mutatja, hogy $(x-\lambda 1)^{-1}(y-\lambda 1)$ invertálható, amiből $\lambda \notin \sigma(y)$ következik, ez pedig ellentmondás. Az állítás visszamaradó része x és y szerepének felcserélésével adódik.

1.4.3. Megjegyzés. Könnyű látni, hogy az $M_n(\mathbb{C})$ matrixalgebrán a spektrum folytonos. Ez abból következik, hogy a spektrum elemei a karakterisztikus polinom gyökei és két olyan polinom, melynek együtthatói közel vannak egymáshoz, egymáséhoz közeli gyökökkel bírnak.

Ebből természetesen nem következik, hogy a spektrum minden Banach-algebra esetén folytonos lenne. Például, ha H végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér, akkor megmutatható, hogy létezik olyan $T, S \in B(H)$ operátor, melyre $r(T) > 0$ és $r(T+\lambda S) = 0$ minden $\lambda \neq 0$ racionális szám esetén. Nyilvánvaló, hogy a spektrum nem folytonos a T pontban.

1.4.4. Tétel. *A spektrum minden pontban felülről félig folytonos, abban az értelemben, hogy tetszőleges $x \in \mathcal{A}$ és $\sigma(x) \subset U$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $\delta > 0$ szám, melyre ha $\|x-y\| < \delta$, akkor $\sigma(y) \subset U$.*

B i z o n y í t á s. Indirekt, tegyük fel, hogy $\sigma(x) \subset U$, U nyílt halmaz és létezik olyan $y_n \to x$ és $\lambda_n \in \sigma(y_n)$ sorozat, hogy $\lambda_n \notin U$. Mivel (y_n) korlátos, így $\sigma(y_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ benne van egy alkalmas zárt körlapban. Ezért a (λ_n) korlátos sorozat, aminek van valamely $\lambda \notin U$ számhoz konvergáló részsorozata. A jelölés egyszerűsége érdekében feltesszük, hogy ez a részsorozat maga a (λ_n). Világos, hogy $x-\lambda 1$ invertálható, és mivel $y_n \to x$ és $\lambda_n \to \lambda$, így $y_n - \lambda_n 1 \to x - \lambda 1$. Ebből kapjuk, hogy $y_n - \lambda_n 1$ is invertálható elég nagy n esetén, amiből $\lambda_n \notin \sigma(y_n)$ következik, ez pedig ellentmondás.

1.4.5. Tétel. *Tetszőleges Banach-algebrán a spektrum folytonossági pontjainak halmaza sűrű G_δ-halmaz.*

B i z o n y í t á s. Lásd [2, Theorem 3.4.3].

1.4.6. Lemma. *Legyen $x_n, x \in \mathcal{A}$, $x_n \to x$ és tegyük fel, hogy U olyan nyílt halmaz a síkon, melyre $\sigma(x_n), \sigma(x) \subset U$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ha $f \in H(U)$, akkor $f(x_n) \to f(x)$.*

Bizonyítás. Mivel $\sigma(x) \subset U$, így létezik olyan V kompakt lezártú nyílt halmaz, melyre $\sigma(x) \subset V \subset \overline{V} \subset U$. A spektrum felülről félig folytonossága miatt $\sigma(x_n) \subset V$ teljesül elég nagy n-ekre. Véges sok indexet elhagyva feltehetjük, hogy az előbbi reláció minden n esetén fennáll. Innen következik, hogy létezik olyan Γ ciklus U-ban, ami körülvesz minden $\sigma(x_n)$-et és a $\sigma(x)$-et. Jelölje

$$C = \sup\{\|(x - z1)^{-1}\| \,:\, z \in \Gamma^*\}.$$

Legyen $0 < q < 1$ tetszőleges. Létezik olyan n_0, hogy $\|x_n - x\| < q/C$ minden $n \geq n_0$ esetén. Tetszőleges $z \in \Gamma^*$-re kapjuk, hogy $\|(x_n - z1) - (x - z1)\| < q/C \leq 1/\|(x - z1)^{-1}\|$. Alkalmazva az 1.2.2. Következmény bizonyításában szereplőket, kapjuk, hogy

$$\|(x_n - z)^{-1} - (x - z)^{-1}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|(x - z)^{-1}\|^{k+1} \|x_n - x\|^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} C^{k+1} \|x_n - x\|^k =$$

$$\|x_n - x\| \sum_{k=1}^{\infty} C^{k+1} \|x_n - x\|^{k-1} \leq \|x_n - x\| \sum_{k=1}^{\infty} C^{k+1} (q/C)^{k-1}.$$

Itt az utolsó sor összege egy konstans, s ezért kapjuk, hogy $(x_n - z1)^{-1} \to (x - z1)^{-1}$-hez a Γ^*-on egyenletesen, amiből a pályamenti integrál tulajdonságai miatt következik, hogy $f(x_n) \to f(x)$.

1.4.7. Lemma. (Newburgh) *Legyen $x \in \mathcal{A}$ és $U, V \subset \mathbb{C}$ diszjunkt nyílt halmazok, úgy, hogy $\sigma(x) \subset U \cup V$ és $\sigma(x) \cap U \neq \emptyset$. Ekkor létezik olyan $\delta > 0$, melyre $\|x - y\| < \delta$ esetén $\sigma(y) \cap U \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Az 1.4.4. Tétel miatt létezik olyan $\delta' > 0$, hogy $\|x - y\| < \delta'$ esetén $\sigma(y) \subset U \cup V$. Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan $y_n \to x$ sorozat, melyre $\sigma(y_n) \subset V$. Tekintsük azt az f holomorf függvényt $U \cup V$-n, ami U-n konstans 1, V-n pedig konstans 0. Az 1.4.6. Lemma miatt $f(y_n) \to f(x)$. Azonban, mivel $\sigma(y_n) \subset V$, így $f(y_n) = 0$. Ebből következik, hogy $f(x) = 0$. De $1 \in f(\sigma(x)) = \sigma(f(x)) = \{0\}$, ami ellentmondás.

1.4.8. Definíció. Egy topológikus teret teljesen szétesőnek nevezünk, ha benne bármely két különböző pont elválasztható nyílt-zárt halmazokkal.

1.4.9. Lemma. *Ha X teljesen széteső kompakt Hausdorff-tér, akkor benne a nyílt-zárt halmazok bázist alkotnak.*

Bizonyítás. Legyen X teljesen széteső kompakt Hausdorff-tér. Tekintsünk egy tetszőleges $x \in X$ pontot és $U \subset X$ nyílt halmazt, ami tartalmazza x-et. Ekkor minden $y \in X \setminus U$ esetén léteznek U_y, V_y diszjunkt nyílt-zárt halmazok, melyekre $x \in U_y$, $y \in V_y$.

Mivel a $\{V_y\}$ rendszer lefedi az $X \setminus U$ kompakt halmazt, így már valamely $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ véges részrendszere is lefedi azt. Tekintsük most az $U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$ nyílt-zárt halmazt. Világos, hogy ez tartalmazza x-et és diszjunkt $V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$-től, tehát $X \setminus U$-tól is. Így ezen halmaz része U-nak. Az állítás innen már nyilvánvaló.

1.4.10. Tétel. (Newburgh) *Ha az $x \in \mathcal{A}$ spektruma teljesen széteső, akkor a spektrum folytonos az x pontban.*

Bizonyítás. Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\sigma(x)$ teljesen széteső, így $\sigma(x)$ belefoglalható véges sok olyan diszjunkt nyílt halmazba, melyek átmérője mind kisebb mint ϵ. Ez a következőképpen látható be. A $\sigma(x)$ minden pontját foglaljuk bele egy $\epsilon/2$-nél kisebb sugarú nyílt körlapba, majd válasszunk olyan U_λ nyílt-zárt részhalmazát $\sigma(x)$-nek, ami benne van ezen körlapban és lefedi pontunkat (1.4.9. Lemma). A kompaktság miatt van olyan $U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n}$ véges részrendszere az U_λ-knak, amik lefedik $\sigma(x)$-et. Tekintsük most az U_{λ_1}, $U_{\lambda_2} \setminus U_{\lambda_1}$, $U_{\lambda_3} \setminus (U_{\lambda_1} \cup U_{\lambda_2})$, stb. halmazokat. Ekkor ezek páronként diszjunkt nyílt-zárt részhalmazai a $\sigma(x)$-nek, amik lefedik $\sigma(x)$-et. Mivel zárt altérbeli zárt halmaz zárt az egész térben, így a fenti partíciója $\sigma(x)$-nek a síkon zárt (sőt kompakt) részhalmazokból áll. Ezek alkalmasan kicsi nyílt környezeteit véve kapjuk az állítást.

Jelölje U az így kapott halmazok unióját. Az 1.4.4. Tétel miatt létezik olyan $r_1 > 0$, melyre $\|y - x\| < r_1$ esetén $\sigma(y) \subset B_\epsilon(\sigma(x))$. Másrészt, az 1.4.7. Lemma miatt létezik olyan $r_2 > 0$, melyre $\|y - x\| < r_2$ esetén $\sigma(y)$ belemetsz a fenti U-t alkotó halmazok mindegyikébe, ami azt jelenti, hogy $\sigma(x) \subset B_\epsilon(\sigma(y))$. Ha most $r = \min\{r_1, r_2\}$, akkor $\|y - x\| < r$ esetén $\sigma(x)$ és $\sigma(y)$ benne vannak egymás ϵ-sugarú nyílt környezetében, amivel a bizonyítás teljes.

1.4.11. Megjegyzés. A fenti tétel fontos következménye, hogy ha $x \in \mathcal{A}$ spektruma megszámlálható, akkor x-ben a spektrum folytonos.

1.4.12. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy tartomány. A $\phi : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ függvényt szubharmónikusnak nevezzük D-n ha ϕ felülről félig folytonos és teljesül rá, hogy

$$\phi(\lambda_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\lambda_0 + re^{it}) dt$$

minden olyan $\overline{B}_r(\lambda_0)$ zárt körlapra, ami benne van D-ben.

1.4.13. Lemma. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, X egy Banach-tér és $f : D \to X$ holomorf függvény. Ekkor a $\lambda \mapsto \log \|f(\lambda)\|$ függvény szubharmónikus.*

B i z o n y í t á s. Nyilvánvaló, hogy a kérdéses függvény felülről félig folytonos. A Cauchy-féle integráltétel miatt

$$f(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda_0 + re^{it}) dt.$$

Innen mindkét oldalon normát véve adódik a szubharmónikus függvényeket jellemző egyenlőtlenség a $\lambda \mapsto \|f(\lambda)\|$ függvényre. Ezen gondolatmenet alkalmazható minden $\lambda \mapsto e^{p(\lambda)} f(\lambda)$ függvénnyel kapcsolatban is, ahol p tetszőleges polinom. Így kapjuk, hogy a $\lambda \mapsto |e^{p(\lambda)}| \|f(\lambda)\|$ függvények mindegyike szubharmónikus. Ebből egy Beckenbach-tól és Saks-tól származó komplex függvénytani tétel következtében adódik a tétel állítása.

1.4.14. Tétel. (Vesentini) *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, és $f : D \to \mathcal{A}$ holomorf függvény. Ekkor a $\lambda \mapsto r(f(\lambda))$ és $\lambda \mapsto \log r(f(\lambda))$ függvények szubharmónikusak.*

B i z o n y í t á s. A spektrálsugár formula miatt a $\frac{1}{2^n} \log \|f(\lambda)^{2^n}\|$ monoton csökkenő függvénysorozat pontonként konvergál $\log r(f(\lambda))$-hoz. Az 1.4.13. Lemma miatt ezen függvénysorozat minden tagja szubharmónikus, s ezért annak határértéke is az. Mivel az exponenciális függvény folytonos és konvex a számegyenesen, innen adódik a $\lambda \mapsto r(f(\lambda))$ függvény szubharmónikussága.

1.4.15. Megjegyzés. A fenti tétel alkalmazásaival kapcsolatban megjegyezzük, hogy a szubharmónikus függvényekre érvényes a Liouville-tétel, azaz az egész síkon értelmezett tetszőleges korlátos szubharmónikus függvény konstans.

1.5 Kommutatív Banach-algebrák Gelfand-elmélete

1.5.1. Definíció. A $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ nem 0 multiplikatív lineáris funkcionált karakternek nevezzük. Az $\mathcal{A}$ karaktereinek halmazát $\hat{\mathcal{A}}$-val jelöljük.

1.5.2. Megjegyzés. Könnyű látni, hogy ha φ karakter, akkor $\varphi(1) = 1$ és $\varphi(x) \in \sigma(x)$ minden $x \in \mathcal{A}$ esetén. Valóban, ha lenne olyan $y \in \mathcal{A}$, melyre $(x - \varphi(x)1)y = 1$, akkor mindkét oldalra alkalmazva a φ-t, kapnánk, hogy $(\varphi(x) - \varphi(x))\varphi(y) = 1$, ami nyilvánvaló ellentmondás. Mivel $|\varphi(x)| \leq r(x) \leq \|x\|$, ezért minden karakter korlátos lineáris funkcionál, mégpedig 1 normával.

Nem nehéz belátni, hogy a $B(H)$ ($\dim H > 1$) Banach-algebrának nincsen karaktere.

1.5.3. Tétel. (Gleason-Kahane-Żelazko) *Legyen $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ olyan lineáris funkcionál, melyre $\varphi(x) \in \sigma(x)$ minden $x \in \mathcal{A}$ esetén. Ekkor φ karakter.*

B i z o n y í t á s. Legyen φ a tételben szereplő tulajdonságú lineáris funkcionál. Ekkor $\varphi(1) \in \sigma(1)$ miatt $\varphi(1) = 1$. Adott x esetén legyen $p(\lambda) = \varphi((x - \lambda 1)^n)$, ahol $n \geq 2$. Ekkor p egy n-ed fokú komplex polinom. Jelölje $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a p gyökeit. Ekkor $0 = p(\lambda_i) = \varphi((x - \lambda_i 1)^n) \in \sigma((x - \lambda_i 1)^n)$, ahonnan $\lambda_i \in \sigma(x)$ következik, tehát $|\lambda_i| \leq r(x)$. Mivel

$$p(\lambda) = \varphi((x - \lambda 1)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi(x^k)(-\lambda)^{n-k} = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i),$$

az együtthatók összehasonlításával kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \binom{n}{1} \varphi(x)$$

és

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \binom{n}{2} \varphi(x^2).$$

Azonban

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j,$$

ahonnan

$$n^2 \varphi(x)^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + n(n-1)\varphi(x^2).$$

Innen kapjuk, hogy

$$n^2(\varphi(x)^2 - \varphi(x^2)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - n\varphi(x^2).$$

Ebből adódik, hogy

$$n^2 |\varphi(x)^2 - \varphi(x^2)| \leq n r(x)^2 + n|\varphi(x^2)|.$$

Mivel ez igaz minden $n \geq 2$-re, így kapjuk, hogy $\varphi(x)^2 = \varphi(x^2)$. Az x helyébe $x + y$-t írva adódik, hogy $2\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy + yx)$. Tekintsük most az

$$(ab - ba)^2 + (ab + ba)^2 = 2(a(bab) + (bab)a)$$

azonosságot. Innen kapjuk, hogy

$$((\varphi(ab) - \varphi(ba))^2 + ((\varphi(ab) + \varphi(ba))^2 = 4\varphi(a)\varphi(bab).$$

Ha most $a = x - \varphi(x)1$ és $b = y$, akkor $\varphi(a) = 0$ miatt kapjuk, hogy

$$\varphi(ab)^2 + \varphi(ba)^2 = 0.$$

Mivel $\varphi(ab + ba) = 2\varphi(a)\varphi(b) = 0$, így $\varphi(ab)\varphi(ba) = 0$. Ebből viszont az előző egyenlőség figyelembevételével kapjuk, hogy $\varphi(ab) = \varphi(ba) = 0$. Ezért

$$\varphi((x - \varphi(x))y) = \varphi(y(x - \varphi(x)) = 0.$$

Innen $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ következik, amivel a bizonyítás teljes.

1.5.4. Tétel. (Kowalski-Slodkowski) *Legyen $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ olyan függvény (a linearitás nincs feltételezve(!)), melyre $\varphi(0) = 0$ és $\varphi(x) - \varphi(y) \in \sigma(x - y)$ minden $x, y \in \mathcal{A}$ esetén. Ekkor φ karakter.*

Bizonyítás. Lásd [14, 1.2. Theorem].

A szakasz további részében $\mathcal{A}$ kommutatív egységelemes Banach algebrát jelöl.

1.5.5. Definíció. Az $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ideált valódinak nevezzük, ha $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{A}$. $\mathcal{I}$-t maximális ideálnak nevezzük, ha valódi ideál és nem foglalható bele egyetlen nálánál bővebb valódi ideálba sem.

1.5.6. Állítás. *Az $\mathcal{A}$ minden valódi ideálja belefoglalható maximális ideálba. Az $\mathcal{A}$ minden maximális ideálja zárt.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{I}$ valódi ideál $\mathcal{A}$-ban, akkor $1 \notin \mathcal{A}$. Ezek után a Zorn-lemmát alkalmazva kapjuk az állítás első részét.

A másodikhoz vegyük észre, hogy ha $\mathcal{I}$ valódi ideál, akkor $1 \notin \mathcal{I}$ mellett még az is igaz, hogy $d(1, \mathcal{I}) \geq 1$. Valóban, ha $\|1 - x\| < 1$ teljesülne valamely $x \in \mathcal{I}$ esetén, akkor x invertálható eleme lenne $\mathcal{I}$-nek, ami ellentmondana $\mathcal{I}$ valódi voltának. Így $d(1, \mathcal{I}) \geq 1$, amiből $d(1, \overline{\mathcal{I}}) \geq 1$ következik, tehát $\mathcal{I}$ lezártja is valódi ideál. Ha most $\mathcal{I}$ maximális, akkor $\overline{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$ adódik, azaz $\mathcal{I}$ zárt.

1.5.7. Tétel. *A $\varphi \mapsto \ker \varphi$ leképezés bijekció az $\mathcal{A}$ karaktereinek és maximális ideáljainak halmaza között.*

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy karakter magja maximális ideál, mivel lineáris funkcionál magja 1-kodimenziós. Legyen most $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ maximális ideál. Azt állítjuk, hogy $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ minden nemzérus eleme invertálható. Valóban, legyen $x \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $x \notin \mathcal{I}$. Ekkor $\mathcal{A}x + \mathcal{I}$ olyan ideál, ami valódi módon tartalmazza $\mathcal{I}$-t. Ezért létezik olyan $a \in \mathcal{A}$ és $i \in \mathcal{I}$, melyre $ax + i = 1$. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy x osztálya invertálható $\mathcal{A}/\mathcal{I}$-ben. Az 1.2.10. Tételt (Gelfand-Mazur) alkalmazva kapjuk, hogy $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ izomorf $\mathbb{C}$-vel. Ezért létezik $\psi : \mathcal{A}/\mathcal{I} \to \mathbb{C}$ multiplikatív lineáris bijekció. Ha $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ jelöli a természetes homomorfizmust, akkor könnyen látható, hogy a $\varphi = \psi \circ \pi$ leképezés olyan multiplikatív lineáris funkcionál, melynek magja éppen $\mathcal{I}$.

Már csak azt kell belátnunk, hogy ha a φ_1, φ_2 karakterek magja megegyezik, akkor $\varphi_1 = \varphi_2$. Mivel ha két lineáris funkcionál magja megegyezik, akkor ők lineárisan függőek, így létezik olyan c skalár, hogy $\varphi_1 = c\varphi_2$. Figyelembe véve, hogy minden karakter az egységelemet 1-be viszi, kapjuk, hogy $c = 1$.

A bizonyítás ezzel teljes.

1.5.8. Tétel. *Az $x \in \mathcal{A}$ elem pontosan akkor nem invertálható, ha belefoglalható az $\mathcal{A}$ valamely maximális ideáljába. Tetszőleges $x \in \mathcal{A}$ elemre*

$$\sigma(x) = \{\varphi(x) \,:\, \varphi \in \hat{\mathcal{A}}\}.$$

Bizonyítás. Ha x benne van egy valódi ideálban, akkor nyilván nem invertálható. Megfordítva, ha x nem invertálható, akkor az $\mathcal{A}x$ ideál valódi, hiszen nem tartalmazza az egységelemet. Ezért $x \in \mathcal{A}x \subset \mathcal{I}$ valamely $\mathcal{I}$ maximális ideálra.

Legyen most $x \in \mathcal{A}$ tetszőleges. Ekkor $x - \lambda 1$ pontosan akkor nem invertálható, ha benne van valamely maximális ideálban, azaz benne van valamely karakter magjában. Így $\lambda \in \sigma(x)$ pontosan akkor ha $0 = \varphi(x - \lambda 1) = \varphi(x) - \lambda$ valemely $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}$ esetén.

1.5.9. Tétel. *Az $\mathcal{A}$ karaktereinek halmaza zárt részhalmaza $\mathcal{A}^*$ egységgömbjének a gyenge*-topológiában. Így $\hat{\mathcal{A}}$ gyenge*-kompakt halmaz.*

Bizonyítás. Azt tudjuk, hogy $\hat{\mathcal{A}}$ benne van $\mathcal{A}^*$ egységgömbjében (1.5.2. Megjegyzés). A zártsághoz legyen (φ_α) karakterek egy olyan nettje, ami konvergál a gyenge*-topológiában a φ lineáris funkcionálhoz. Mivel a gyenge*-topológia által indukált konvergencia éppen a pontonkénti konvergencia, így kapjuk, hogy φ multiplikatív lineáris funkcionál és $\varphi(1) = 1$. Következésképpen $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}$. Az $\hat{\mathcal{A}}$ kompaktsága következik az $\mathcal{A}^*$ egységgömbjének kompaktságából (Banach-Alaoglu tétel).

1.5.10. Definíció. Az $\mathcal{A}$ karaktereinek $\hat{\mathcal{A}}$ halmazát ellátva a gyenge *-topológiával az $\mathcal{A}$ struktúraterének nevezzük.

1.5.11. Tétel. *Tetszőleges $x \in \mathcal{A}$ esetén legyen*

$$\hat{x}(\varphi) = \varphi(x) \qquad (\varphi \in \hat{\mathcal{A}}).$$

Ekkor az $x \longmapsto \hat{x}$ leképezésre teljesülnek a következők:

(1) lineáris, multiplikatív leképezése $\mathcal{A}$-nak $C(\hat{\mathcal{A}})$-ba;

(2) az $\hat{x}$ $(x \in \mathcal{A})$ függvények által alkotott részalgebrája $C(\hat{\mathcal{A}})$-nak tartalmazza a konstans függvényeket és szeparálja $\hat{\mathcal{A}}$ pontjait;

(3) $\|\hat{x}\| = r(x)$ minden $x \in \mathcal{A}$ esetén.

Bizonyítás. Mivel az $x \longmapsto \hat{x}$ leképezés nyilvánvalóan lineáris és multiplikatív, így az (1)-ben szereplő állításhoz csak azt kell belátni, hogy $\hat{x}$ folytonos függvény $\hat{\mathcal{A}}$-n. Ez azonban világos a struktúratér topológiájának definíciója miatt. A (2)-höz vegyük észre,

hogy $\hat{1}$ az azonosan 1 függvény, illetve, hogy ha $\hat{x}(\varphi) = \hat{x}(\psi)$ minden $x \in \mathcal{A}$ esetén, akkor $\varphi(x) = \psi(x)$ $(x \in \mathcal{A})$, amiből $\varphi = \psi$ következik. A (3) állítás az alábbiakból adódik

$$\|\hat{x}\| = \sup_{\varphi \in \hat{\mathcal{A}}} |\hat{x}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \hat{\mathcal{A}}} |\varphi(x)| = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| = r(x).$$

1.5.12. Definíció. A fenti $x \longmapsto \hat{x}$ leképezést Gelfand-transzformációnak nevezzük, $\hat{x}$-et pedig az x Gelfand-transzformáltjának hívjuk.

1.5.13. Definíció. Az $\mathcal{A}$ maximális ideáljainak metszetét az $\mathcal{A}$ (Jacobson-féle) radikáljának nevezzük és $\operatorname{rad}(\mathcal{A})$-val jelöljük. Ha $\mathcal{A}$ radikálja triviális, azaz $\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$, akkor $\mathcal{A}$-t féligegyszerűnek hívjuk.

1.5.14. Következmény. *$\mathcal{A}$ radikálja megegyezik az $\mathcal{A}$ Gelfand-transzformációjának magjával. $\mathcal{A}$ pontosan akkor féligegyszerű ha a Gelfand-transzformációja injektív.*

Bizonyítás. Mivel

$$x \in \operatorname{rad}(\mathcal{A}) \Longleftrightarrow x \in \ker \varphi \ \ (\varphi \in \hat{\mathcal{A}}) \Longleftrightarrow \hat{x}(\varphi) = 0 \ \ (\varphi \in \hat{\mathcal{A}}) \Longleftrightarrow \hat{x} = 0,$$

így kapjuk az állítást.

1.5.15. Következmény. *Az $x \in \mathcal{A}$ pontosan akkor eleme $\mathcal{A}$ radikáljának, ha $\sigma(x) = \{0\}$.*

Bizonyítás. Az állítás abból adódik, hogy $\sigma(x) = \{0\}$ akkor és csak akkor, ha $\varphi(x) = 0$ minden $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}$ esetén, ami egyenértékű avval, hogy $\sigma(x) = \{0\}$.

1.5.16. Következmény. *Legyen $\mathcal{B}$ egy (nem feltétlenül kommutatív) egységelemes Banach-algebra és legyenek $x, y \in \mathcal{B}$ egymással felcserélhető elemek. Ekkor*

$$r(x+y) \leq r(x) + r(y), \quad r(xy) \leq r(x)r(y).$$

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{B}_0$ az $x, y, 1$ által generált kommutatív részalgebráját $\mathcal{B}$-nek. Ekkor $\mathcal{B}_0$ Gelfand-transzformációját tekintve kapjuk, hogy

$$r(x+y) = \|\widehat{x+y}\| = \|\hat{x} + \hat{y}\| \leq \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\| = r(x) + r(y).$$

A szubmultiplikativitásra vonatkozó állítás teljesen hasonlóan látható be.

1.5.17. Tétel. *Legyen X kompakt Hausdorff-tér. A $C(X)$ Banach-algebra maximális ideáljai éppen az*

$$\mathcal{I}_x = \{f \in C(X) \ : \ f(x) = 0\}$$

alakú halmazok, karakterei pedig éppen az $f \mapsto f(x)$ alakú leképezések, ahol $x \in X$. Létezik olyan $\phi : \widehat{C(X)} \to X$ homeomorfizmus, melyre $\hat{f} = f \circ \phi$ $(f \in C(X))$. Tehát $C(X)$ struktúratere homeomorf X-szel, és a $\widehat{C(X)} = X$ beazonosítás mellett $C(X)$ Gelfand-transzformációja az identitás.

B i z o n y í t á s. Mivel $\mathcal{I}_x$ 1-kodimenziós ideál $C(X)$-ben, így maximális. Megfordítva, legyen $\mathcal{I} \subset C(X)$ maximális ideál. Világos, hogy minden $f \in \mathcal{I}$ eltűnik az X valamely pontjában. Megmutatjuk, hogy van egy olyan közös pont, melyben minden $f \in \mathcal{I}$ eltűnik. Ha nem így lenne, akkor X minden x pontjához létezne olyan $f_x \in \mathcal{I}$ függvény, melyre $f_x(x) \neq 0$. Ekkor létezik olyan U_x környezete x-nek, melyben f_x seholsem tűnik el. Ezen U_x-ek egy lefedését adják X-nek, amiből az X kompaktsága miatt kiválasztható véges részlefedés. Tekintsük a kapcsolódó $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n} \in \mathcal{I}$ függvényeket. Világos, hogy az

$$|f_{x_1}|^2 + \ldots + |f_{x_n}|^2 = f_{x_1}\overline{f_{x_1}} + \ldots + f_{x_n}\overline{f_{x_n}} \in \mathcal{I}$$

függvény seholsem tűnik el. Ekkor viszont ő invertálható eleme a $C(X)$-nek, ami ellentmond az $\mathcal{I}$ ideál valódi voltának. Tehát van egy olyan x pont, melyben minden $f \in \mathcal{I}$ függvény eltűnik. Ekkor $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_x$, amiből $\mathcal{I}$ maximalitása miatt kapjuk, hogy $\mathcal{I} = \mathcal{I}_x$.

Legyen φ tetszőleges karaktere $C(X)$-nek. Ekkor létezik olyan $x \in X$, melyre $\ker \varphi = \mathcal{I}_x$. Jelölje φ_x a következő karaktert: $\varphi_x(f) = f(x)$ $(f \in C(X))$. Ekkor $\ker \varphi = \ker \varphi_x$. Ebből pedig következik, hogy $\varphi = \varphi_x$. Tekintsük az $x \mapsto \varphi_x$ leképezést. Az előzőekből adódóan ez egy szürjektív leképezése X-nek $\widehat{C(X)}$-re. Az Uryson-lemmát felhasználva adódik, hogy tetszőleges $x \neq y$ pontok esetén létezik olyan $f \in C(X)$, melyre $f(x) \neq f(y)$. Ezért az előbbi léképezés injektív is. Mivel a struktúratér topologiája éppen a pontonkénti konvergencia topológiája, ezért leképezésünk folytonos bijekció két kompakt Hausdorff-tér között, aminek ezért inverze is folytonos. Jelölje most ϕ a fenti leképezés inverzét. Ekkor

$$f(\phi(\varphi)) = \varphi(f) = \hat{f}(\varphi)$$

teljesül minden $\varphi \in \widehat{C(X)}$ és $f \in C(X)$ esetén. A bizonyítása evvel teljes.

1.5.18. Megjegyzés. Tekintsük az $L^1(\mathbb{T}) \simeq L^1[0, 2\pi]$ kommutatív Banach-algebrát a konvolúció műveletével (vegyük észre, hogy ennek nincs egységeleme). Az alábbiakban meghatározzuk ezen algebra struktúraterét azaz a nemzérus karaktereinek terét (ami nem egységelemes algebrák esetén lokálisan kompakt Hausdorff-tér) és Gelfand-transzformációját. Legyen φ nemzérus karakter. Mivel φ folytonos lineáris funkcionál (ez igaz a nem egységelemes Banach-algebrák esetében is), így létezik olyan $h \in L^\infty(\mathbb{T})$ függvény, melyre

$$\varphi(f) = \int_0^{2\pi} f(t)h(t)d\,\mu(t) \qquad (f \in L^1)$$

(μ a normalizált Lebesgue mérték a $[0, 2\pi]$-n). Felhasználva φ multiplikativitását, a Fubini-tételt, és μ mod 2π eltolásinvarianciáját, kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(s)h(t+s)d\,t\,d\,s = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(s)h(t)h(s)d\,t\,d\,s$$

minden $f, g \in L^1$ esetén. Ebből következik, hogy $h(s)h(t) = h(t+s)$ majdnem minden t, s-re (az összeadás mod 2π értendő). Feltehető, hogy ezen egyenlet minden $t, s \in [0, 2\pi]$ teljesül. Ezen függvényegyenlet korlátos mérhető megoldásai pedig éppen az $e_n(t) = e^{int}$ ($t \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{Z}$) függvények.

Így minden φ karakterhez létezik olyan $n \in \mathbb{Z}$, melyre

$$\varphi(f) = \varphi_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} d\,\mu(t) \qquad (f \in L^1).$$

Könnyen látható, hogy minden φ_n karaktere az L^1-nek. Tekintsük a $\phi : n \mapsto \varphi_n$ megfeleltetést. Az előzőeket is felhasználva adódik, hogy ez egy bijekció a $\mathbb{Z}$ és L^1 struktúratere között. Mivel $\mathbb{Z}$ diszkrét, így ezen leképezés folytonos. Az inverz folytonossága is könnyen látható. Mivel

$$\hat{f}(\phi(n)) = \phi(n)(f) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} d\,t \quad (f \in L^1)$$

így mondhatjuk, hogy tetszőleges f L^1-beli függvény Gelfand-transzformáltja éppen f Fourier-együtthatóinak sorozatával egyezik meg. A fentiek általánosabban is igazak, amint azt a következő tétel mutatja.

1.5.19. Tétel. *Legyen G lokálisan kompakt kommutatív csoport és tekintsük az $L^1(G)$ csoportalgebrát, ami egy nem feltétlenül egységelemes kommutatív Banach-algebra (lásd 1.1.7. Példa). Ekkor $L^1(G)$ struktúratere homeomorf $\hat{G}$-vel, azaz G duális csoportjával (ez a G csoport $\mathbb{T}$-be történő folytonos multiplikatív leképezéseinek halmaza ellátva a kompakt halmazokon egyenletes konvergencia topológiájával). Létezik olyan $\phi : \widehat{L^1(G)} \to \hat{G}$ homeomorfizmus, melyre*

$$\hat{f}(\phi^{-1}(\gamma)) = [\phi^{-1}(\gamma)](f) = \int_G f(t)\gamma(-t) d\,\mu(t) \quad (f \in L^1(G)).$$

Így mondhatjuk, hogy tetszőleges $f \in L^1(G)$ függvény Gelfand-transzformáltja megegyezik az f Fourier-transzformáltjával. Ezért a Gelfand-transzformáció a Fourier-transzformáció általánosítása.

1.5.20. Tétel. *A W Wiener-algebra (1.1.8. Példa) struktúratere homeomorf $\mathbb{T}$-vel.*

Bizonyítás. Legyen $t \in [0, 2\pi[$ és definiáljuk

$$\varphi_t(f) = f(t) \qquad (f \in W).$$

Ekkor φ_t nyilván karakter. Legyen most φ karaktere W-nek. Mivel az $s \mapsto e^{is}$ és $s \mapsto e^{-is}$ függvények normája 1, így φ-szerinti képük 1-nél kisebb vagy egyenlő abszolút értékű, míg szorzatuk képe éppen 1. Innen következik, hogy létezik olyan $t \in [0, 2\pi[$, melyre

$$e^{it} = \varphi(e^{is})$$

(itt e^{is} függvényt jelöl). Mivel ha $f \in W$, akkor $f(s) = \sum_n \hat{f}(n)e^{ins}$ és ezen sor konvergens W normájában, így

$$\varphi(f) = \sum_n \hat{f}(n)\varphi(e^{is})^n = \sum_n \hat{f}(n)e^{int} = f(t) = \varphi_t(f) \qquad (f \in W).$$

Könnyen látszik, hogy a $t \mapsto \varphi_t$ leképezés bijekció a $[0, 2\pi[$ és $\hat{W}$ között. Tekintsük ezek után a $z \mapsto \varphi_{\arg z}$ leképezését $\mathbb{T}$-nek a W struktúraterére. Világos, hogy ez injektív és folytonos. Mivel kompakt Hausdorff-terek közötti folytonos bijekció homeomorfizmus, kapjuk az állítást.

1.5.21. Következmény. (Wiener-Lévy) *Tegyük fel, hogy $f \in W$ seholsem tűnik el. Ekkor $1/f \in W$.*

Bizonyítás. Az előző tétel miatt az $f \in W$ spektruma éppen a f értékkészlete. Innen kapjuk, hogy f invertálható W-ben, azaz létezik olyan $g \in W$, melyre $fg = 1$. Innen $1/f = g \in W$ következik.

1.5.22. Tétel. *Az $A(\mathbb{D})$ disk-algebra (1.1.6. Példa) struktúratere homeomorf $\mathbb{D}$-vel.*

Bizonyítás. Tetszőleges $z_0 \in \mathbb{D}$ esetén a $\varphi_{z_0} : f \mapsto f(z_0)$ karakter. Ha φ karakter, akkor $\varphi(z) \in \mathbb{D}$ (itt z-vel a $\mathbb{D}$ identikus függvényét jelöljük). Valóban, mivel minden karakter normája 1, ezért $|\varphi(z)| \leq \|\varphi\|\|z\| = 1$. Jelölje $z_0 = \varphi(z)$. Ha belátjuk, hogy a polinomok sűrűn vannak $A(\mathbb{D})$-ben, akkor innen kapjuk, hogy φ megegyezik az $f \mapsto f(z_0)$ karakterrel. Állításunk igazolásához legyen $f \in A(\mathbb{D})$. A Cauchy-tétel miatt

$$\int_{\gamma_r} f(z)z^n d\,z = 0 \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

minden $0 < r < 1$ esetén, ahol $\gamma_r(t) = re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$. Az $r \to 1$ határátmenetet véve következik, hogy

$$\int_{\gamma_1} f(z)z^{-(n+1)} d\,z = 0 \qquad (n = -1, -2, \ldots).$$

Mivel

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int} d\,t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(z)z^{-(n+1)} d\,z = 0 \qquad (n = -1, -2, \ldots),$$

így f negatív Fourier-együtthatói nullák. Fejér tételét felhasználva kapjuk, hogy f egyenletesen approximálható polinomokkal az egységkör kerületén. A maximum-tétel miatt ezen approximálhatóság fennáll a teljes $\mathbb{D}$ halmazon is. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy f egyenletesen approximálható polinomokkal a $\mathbb{D}$-n.

Végezetül, hasonlóan az előző bizonyításokhoz, könnyen belátható, hogy a $\mathbb{D}$ pontjai és $A(\mathbb{D})$ karakterei között a $z \mapsto \varphi_z$ leképezés homeomorfizmus.

1.5.23. Következmény. *Legyen $f_1, \ldots, f_n \in A(\mathbb{D})$, olyan, hogy minden $z \in \mathbb{D}$-re $f_i(z) \neq 0$ valamely $i = 1, \ldots, n$ esetén. Ekkor léteznek olyan $g_1, \ldots\ g_n \in A(\mathbb{D})$ függvények, melyekre*

$$f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = 1.$$

Bizonyítás. Az $f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n$ alakú összegek ($g_1, \ldots, g_n \in A(\mathbb{D})$) ideált alkotnak. Ha ez valódi lenne, akkor benne lenne egy maximális ideálban, s így egy karakter nullterében. De az előző tétel miatt ekkor következne, hogy lenne egy olyan pont, ahol ezen fügvények mindegyike eltűnik, ami ellentmond az állításban szereplő feltételnek. Így a fenti ideál megegyezik $A(\mathbb{D})$-vel, ahonnan kapjuk az állítást.

1.5.24. Megjegyzés. Jelölje $H^\infty(U)$ a korlátos holomorf függvények összességét az U nyílt egységkörlapon. Ez a sup-normával egy kommutatív Banach-algebra. Világos, hogy a $\varphi_z : f \mapsto f(z)$, $z \in U$ leképezések karakterei $H^\infty(U)$-nak és a $z \mapsto \varphi_z$ leképezés homeomorf beágyazása U-nak $H^\infty(U)$ struktúraterébe. Az a kérdés, hogy vajon U képe sűrű-e a szóbanforgó struktúratérben, igen híres probléma, amit Korona Problémának neveznek. Ennek igenlő megválaszolása L. Carleson nevéhez fűződik. Ha nem egyszeresen összefüggő tartomány fölötti H^∞-algebrát tekintünk, akkor a kérdés mind a mai napig megválaszolatlan.

1.5.25. Tétel. *Legyen X Tyihonov-tér (teljesen reguláris Hausdorff-tér). Ekkor létezik olyan βX kompakt Hausdorff-tér, ami sűrű részhalmazként tartalmazza X-et, s ami rendelkezik avval a tulajdonsággal, hogy minden $f : X \to \mathbb{C}$ korlátos folytonos függvény kiterjeszthető folytonosan a βX-re. A βX teret X Stone-Čech kompaktifikáltjának nevezzük.*

Bizonyítás. Jelölje $C_b(X)$ az X-en értelmezett korlátos folytonos komplex-értékű függvények Banach-algebráját. Jelöje βX ennek struktúraterét. Világos, hogy βX kompakt Hausdorff-tér. Az $x \mapsto \varphi_x$, $\varphi_x(f) = f(x)$ ($f \in C_b(X)$) leképezés folytonos injektív leképezése X-nek βX-be (az injektivitás az Uryson-lemma következménye). Legyen (x_α) egy nett X-ben, $x \in X$ és tegyük fel, hogy $f(x_\alpha) \to f(x)$ minden $f \in C_b(X)$ esetén. Ismét felhasználva az Uryson-lemmát, ebből $x_\alpha \to x$ következik, ami azt mutatja, hogy az $x \mapsto \varphi_x$ inverze is folytonos. Ezen leképezés értékkészletének sűrűségéhez legyen F olyan folytonos függvény βX-en, ami eltűnik a φ_x-eken. A C^*-algebrákkal kapcsolatban tanulni fogjuk (2.2.2. Tétel), hogy az ő Gelfand-transzformációjuk izometrikus izomorfizmus a struktúratéren értelmezett folytonos függvények terére. Így létezik olyan $f \in C_b(X)$, melyre $F = \hat{f}$. Innen

$$0 = F(\varphi_x) = \hat{f}(\varphi_x) = \varphi_x(f) = f(x) \qquad (x \in X)$$

miatt kapjuk, hogy $f = 0$, amiből $F = 0$ következik. Ebből kapjuk X sűrűségét βX-ben. Ha $f \in C_b(X)$, akkor $\hat{f} \in C(\beta X)$ és $\hat{f}(\varphi_x) = f(x)$ $(x \in X)$. Tehát $\hat{f}$ az f kiterjesztésének tekinthető βX-re. A bizonyítás ezzel teljes.

1.5.26. Definíció. Az $\mathcal{A}$ kommutatív egységelemes Banach-algebrát uniform algebrának nevezzük ha mint algebra izomorf (de nem feltétlenül izometrikus) egy X kompakt Hausdorff-téren vett $C(X)$ algebra valamely zárt részalgebrájával, ami tartalmazza a konstans függvényeket.

1.5.27. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ kommutatív egységelemes Banach-algebra. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(1) $\mathcal{A}$ uniform algebra;

(2) $\|x\|^2 \leq C\|x^2\|$ $(x \in \mathcal{A})$ valamely $C > 0$ konstanssal;

(3) $\|x\| \leq Cr(x)$ $(x \in \mathcal{A})$ valamely $C > 0$ konstanssal;

(4) a spektrálsugár teljes norma $\mathcal{A}$-n;

(5) a Gelfand-transzformáció injektív és képtere zárt $C(\hat{\mathcal{A}})$-ban.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (2) fennáll. Teljes indukcióval belátható, hogy

$$\|x\|^{2^n} \leq C^{2^n-1}\|x^{2^n}\|.$$

Innen 2^n-edik gyököt véve, majd a spektrálsugár-formulát alkalmazva kapjuk (3)-at. Ismeretes, hogy tetszőleges Banach-algebrában kommutáló elemeken a spektrálsugár szubadditív és szubmultiplikatív (1.5.16. Következmény). Ezért kommutatív Banach-algebrán a spektrálsugár algebra szeminorma. Ha (3) igaz, akkor r az eredeti normával, $\|.\|$-val ekvivalens norma, s így teljes. Így kapjuk (4)-et. Ha (4) teljesül, akkor $\|\hat{x}\| = r(x) = 0$-ból $x = 0$ következik, ami a Gelfand-transzformáció injektivitását jelenti. Mivel a Gelfand-transzformáció képtere izometrikusan izomorf mint Banach-tér az $\mathcal{A}$-val ha azon a spektrálsugarat mint normát tekintjük, ezért a szóbanforgó képtér teljes, azaz zárt $C(\hat{\mathcal{A}})$-ban. Tehát ebben az esetben (5) teljesül. Az (5) $\Longrightarrow$ (1) implikáció nyilvánvaló. Az (1)-et feltételezve, azaz ha $\mathcal{A}$ uniform algebra, akkor van olyan X kompakt Hausdorff-tér és $\mathcal{B} \subset C(X)$ zárt részalgebra, melyre létezik $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ algebra-izomorfizmus. Világos, hogy $r(x) = r_{\mathcal{B}}(\phi(x))$, ahol $r_{\mathcal{B}}$ jelöli a $\mathcal{B}$ részalgebrára vonatkozó spektrálsugarat. A spektrálsugár-formulát alkalmazva $\mathcal{B}$-re illetve $C(X)$-re, kapjuk, hogy $r_{\mathcal{B}}(\phi(x)) = r(\phi(x)) = \|\phi(x)\|$. Tehát

$$r(x) = \|\phi(x)\| \qquad (x \in \mathcal{A}).$$

Ebből pedig adódik a (4). Mivel $r(x) \leq \|x\|$ mindig teljesül, így ha (4) igaz, akkor az identikus operátor korlátos lineáris leképezés $(\mathcal{A}, \|.\|)$-ról $(\mathcal{A}, r(.))$-re. Innen a korlátos inverzről szóló tétel miatt kapjuk, hogy ezen két norma ekvivalens, azaz

$$\|x\| \leq Cr(x) \qquad (x \in \mathcal{A})$$

valamely $C > 0$ konstans esetén. Ez éppen a (3)-ban szereplő állítás. Végül, (3)-at feltételezve, a spektrálsugár-formuláról szóló tétel (1.2.8. Tétel) miatt $r(x) \leq \|x^2\|^{1/2}$, így kapjuk (2)-t. Ezzel a bizonyítás teljes.

1.5.28 . Definíció. Az $\mathcal{A}$ kommutatív egységelemes Banach-algebrát függvényalgebrának nevezzük ha izometrikusan izomorf (mint algebra) valamely X kompakt Hausdorff-tér felett vett $C(X)$ algebra valamely zárt részalgebrájával, mely tartalmazza a konstans függvényeket és szeparálja X pontjait.

1.5.29 . Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ kommutatív egységelemes Banach-algebra. $\mathcal{A}$ pontosan akkor függvényalgebra, ha teljesül rá, hogy $\|x^2\| = \|x\|^2$ $(x \in \mathcal{A})$.*

B i z o n y í t á s. A szükségesség nyilvánvaló. Legyen most $\mathcal{A}$ olyan, hogy $\|x^2\| = \|x\|^2$ $(x \in \mathcal{A})$. Ekkor teljes indukcióval belátható, hogy $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$ $(x \in \mathcal{A})$. A spektrálsugár-formula miatt innen $r(x) = \|x\|$ $(x \in \mathcal{A})$ következik. Az 1.5.11. Tétel miatt a Gelfand-transzformáció izometrikus izomorfizmus, így képe zárt részalgebrája $C(\hat{\mathcal{A}})$-nak. Újból az 1.5.11. Tételre hivatkozva kapjuk, hogy $\mathcal{A}$ függvényalgebra.

1.5.30 . Definíció. Legyen X kompakt Hausdorff-tér és $\mathcal{A} \subset C(X)$ részalgebra (nem feltétlenül zárt), ami tartalmazza a konstansokat és szeparálja X pontjait. Az $\emptyset \neq E \subset X$ zárt halmazt $\mathcal{A}$ határának nevezzük, ha

$$\|f\|_E = \sup_{x \in E} |f(x)| = \sup_{x \in X} |f(x)| = \|f\|$$

teljesül minden $f \in \mathcal{A}$ esetén.

1.5.31 . Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ olyan mint az előző definícióban. Ha E_0 határa $\mathcal{A}$-nak és $x_0 \notin E_0$ tetszőleges, akkor létezik olyan U nyílt környezete x_0-nak, melyre $E \setminus U$ határa $\mathcal{A}$-nak minden E határ esetén.*

B i z o n y í t á s. Tetszőleges $y \in E_0$ esetén létezik olyan $f_y \in \mathcal{A}$ folytonos függvény, melyre

$$f_y(x_0) = 0, \quad |f_y(y)| = 2.$$

A $\{z \in X : |f_y(z)| > 1\}$, $y \in E_0$ halmazok nyílt lefedését adják E_0-nak, ezért kiválasztható belőlük egy véges $\{z \in X : |f_{y_k}(z)| > 1\}$, $k = 1, \ldots, n$ részlefedés. Legyen

$$U = \{z \in X : |f_{y_1}(z)| < 1\} \cap \ldots \cap \{z \in X : |f_{y_n}(z)| < 1\}.$$

Ekkor U nyílt környezete x_0-nak.

Legyen E határa $\mathcal{A}$-nak. Ha $E \setminus U$ üres, akkor $E \subset U$ és

$$\|f_{y_1}\|_E \leq \|f_{y_1}\|_U \leq 1 < 2 \leq \|f_{y_1}\|.$$

Ezért $E \setminus U \neq \emptyset$. Ha $E \setminus U$ nem határ, akkor van olyan $f \in \mathcal{A}$ függvény, melyre $1 = \|f\| > \|f\|_{E \setminus U}$. Legyen $M = \max\{\|f_{y_1}\|, \ldots, \|f_{y_n}\|\}$. Létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre

$$\|f^N\|_{E \setminus U} M = \|f\|^N_{E \setminus U} M < 1.$$

Ezért

$$|(f^N f_{y_k})(x)| < 1 \qquad (x \in E \setminus U)$$

de ezen egyenlőtlenség U definíciója miatt U-n is teljesül, tehát

$$\|f^N f_{y_k}\| = \|f^N f_{y_k}\|_E < 1.$$

Ha $e_0 \in E_0$ olyan pont, melyre $|f(e_0)| = \|f\| = 1$, akkor kapjuk, hogy $|f_{y_k}(e_0)| = |(f^N f_{y_k})(e_0)| < 1$, $k = 1, \ldots, n$. Ebből következik, hogy e_0 nincs benne a

$$\{z \in X : |f_{y_k}(z)| > 1\}, \quad k = 1, \ldots, n$$

halmazok egyikében sem, ami ellentmondás. Ezért $E \setminus U$ határ, s ezzel a bizonyítás teljes.

1.5.32. Tétel. (Šilov) *Legyen $\mathcal{A}$ olyan mint az előző lemmában. Ekkor $\mathcal{A}$ határainak metszete is határ.*

Bizonyítás. Jelölje S az $\mathcal{A}$ határainak metszetét. Legyen $f \in \mathcal{A}$. Definiáljuk

$$K = \{x \in X : \|f\| = |f(x)|\}.$$

Azt állítjuk, hogy $K \cap S \neq \emptyset$. Ha nem így lenne, akkor tetszőleges $x_0 \in K$ elemre $x_0 \notin E_0$ valamely E_0 határ esetén. Legyen U_{x_0} az előző lemmában szereplő környezete x_0-nak. Mivel K nemüres kompakt halmaz, így kiválasztható véges sok olyan U_{x_k}, $x_k \in K$ $k = 1, \ldots, n$ halmaz, ami lefedi K-t. Mivel X határa $\mathcal{A}$-nak, így $X \setminus U_{x_1}$ is határ, ahonnan következik, hogy $(X \setminus U_{x_1}) \setminus U_{x_2}$ is határ, stb. Végül kapjuk, hogy $X \setminus (U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n})$ is határ. Ez azonban ellentmond K definíciójának és annak, hogy $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ lefedi K-t. Az állítás ezek után nyilvánvaló.

1.5.33. Definíció. Az előző tételben szereplő határok metszetét az $\mathcal{A}$ Šilov-határának nevezzük.

1.5.34. Megjegyzés. Ha X kompakt Hausdorff-tér, akkor $C(X)$ Šilov-határa X. Az $A(\mathbb{D})$ disk-algebra Šilov-határa $\mathbb{T}$. Az előbbi állítás az Uryson-lemmából, az utóbbi pedig a maximum-tételből következik.

1.6 Algebrák reprezentációi, a Jacobson-radikál

Jelen szakaszban $\mathcal{A}$ egy egységelemes komplex algebrát (nem feltétlenül Banach-algebrát) jelöl.

1.6.1. Definíció. Legyen X egy legalább 1-dimenziós vektortér. Jelölje $L(X)$ az X-en értelmezett összes lineáris operátor algebráját. Ha $\pi : \mathcal{A} \to L(X)$ multiplikatív lineáris leképezés, akkor azt mondjuk, hogy π egy reprezentációja $\mathcal{A}$-nak X-en. A π-t irreducibilisnek nevezzük, ha $\pi \neq 0$ és a $\pi(\mathcal{A})$ operátoralgebrának nincs nemtriviális invariáns altere.

1.6.2. Tétel. *Legyen π az $\mathcal{A}$ irreducibilis reprezentációja az X vektortéren. Ekkor $\pi(1) = I$ és $\pi(\mathcal{A})\xi = X$ tetszőleges $0 \neq \xi \in X$ esetén. (Ez utóbbi állítást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy irreducibilis reprezentációnak minden nemzérus vektor ciklikus vektora.)*

Megfordítva, ha π-nek az X minden nemzérus vektora ciklikus vektora, akkor π irreducibilis.

Bizonyítás. Legyen π irreducibilis reprezentáció. Mivel $\pi(1)^2 = \pi(1^2) = \pi(1)$, így $\pi(1)$ idempotens. Ennek értékkészlete invariáns altere $\pi(\mathcal{A})$-nak. Ez a következő egyenlőségből következik:

$$\pi(a)(\pi(1)\xi) = \pi(a \cdot 1)\xi = \pi(1 \cdot a)\xi = \pi(1)(\pi(a)\xi).$$

Az irreducibilitás miatt $\pi(1)$ értékkészlete vagy $\{0\}$ vagy X. Az előbbi eset nem fordulhat elő, mivel ekkor $\pi(1) = 0$ lenne, amiből $\pi = 0$ következne. Ezért a $\pi(1)$ idempotens értékkészlete X, amiből $\pi(1) = I$ adódik.

Legyen $0 \neq \xi \in X$. Világos, hogy a $\pi(\mathcal{A})\xi$ altér invariáns altere $\pi(\mathcal{A})$-nak. Ezért vagy $\pi(\mathcal{A})\xi = \{0\}$ vagy $\pi(\mathcal{A})\xi = X$. Az előbbi eset nem állhat fenn, mivel $\pi(1)\xi = \xi$. Kapjuk tehát, hogy ξ ciklikus vektor.

Tegyük most fel, hogy π-nek minden $0 \neq \xi \in X$ vektor ciklikus vektora. Világos,

hogy $\pi \neq 0$. Ha $\{0\} \neq M \subset X$ invariáns altere $\pi(\mathcal{A})$-nak, akkor választva egy tetszőleges $0 \neq \xi \in M$ vektort, kapjuk, hogy $\pi(\mathcal{A})\xi \subset M$. Mivel ξ ciklikus vektor, adódik, hogy $M = X$. Innen kapjuk, hogy π irreducibilis reprezentáció.

1.6.3. Definíció. A $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ ideált primitívnek nevezzük, ha megegyezik az $\mathcal{A}$ valamely irreducibilis reprezentációjának magjával.

Az $\mathcal{A}$ algebrát primitívnek hívjuk, ha $\{0\}$ primitív ideál, azaz ha $\mathcal{A}$-nak van injektív irreducibilis reprezentációja.

1.6.4. Megjegyzés. Legyen X Banach-tér és $\mathcal{A}$ a $B(X)$ operátoralgebra egy olyan részalgebrája, ami tartalmazza a $B(X)$ minden véges rangú elemét. Ekkor $\mathcal{A}$-t standard operátoralgebrának nevezzük. Könnyen látszik, standard operátoralgebra primitív, hiszen az identitás egy irreducbilis reprezentációja $\mathcal{A}$-nak X-en.

1.6.5. Jelölés. Ha $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ balideál, akkor jelölje $(\mathcal{L} : \mathcal{A})$ az

$$(\mathcal{L} : \mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \,:\, a\mathcal{A} \subset \mathcal{L}\}$$

módon definiált ideált.

1.6.6. Megjegyzés. Legyen $\mathcal{L}$ valódi balideál $\mathcal{A}$-ban. Tetszőleges $a \in \mathcal{A}$ esetén legyen $L_a\overline{x} = \overline{ax}$ $(x \in \mathcal{A})$, ahol $\overline{x}$ jelöli az x mellékosztályát az $\mathcal{A}/\mathcal{L}$ faktortérben. Könnyen látszik, hogy L_a minden $a \in \mathcal{A}$ esetén jóldefiniált (ehhez kell, hogy $\mathcal{L}$ balideál) lineáris operátor az $\mathcal{A}/\mathcal{L}$ vektortéren, továbbá az $a \mapsto L_a$ leképezés egy reprezentációja $\mathcal{A}$-nak. Ezt az $\mathcal{L}$ balideál által indukált bal reguláris reprezentációnak nevezzük. Könnyen látható, hogy ezen reprezentáció magja éppen $(\mathcal{L} : \mathcal{A})$.

A fenti reprezentáció pontosan akkor irreducibilis, ha $\mathcal{L}$ maximális balideál. Valóban, ha $\mathcal{L}$ maximális, akkor tetszőleges $x \notin \mathcal{L}$ esetén az $\mathcal{A}x + \mathcal{L}$ balideál szükségképpen az egész $\mathcal{A}$. Ebből következik, hogy tetszőleges $t \in \mathcal{A}$-ra a $\overline{ax} = \overline{t}$ egyenlet megoldható a-ra, azaz van olyan $a \in \mathcal{A}$ melyre $L_a\overline{x} = \overline{t}$. Tehát az $\mathcal{A}/\mathcal{L}$ tetszőleges nemzérus vektora ciklikus vektora a bal reguláris reprezentációnak, ami ezért irreducibilis. Az állítás megfordítása hasonlóan látható be.

1.6.7. Állítás. *Legyen π az $\mathcal{A}$ irreducibilis reprezentációja az X vektortéren. Ekkor tetszőleges $0 \neq \xi \in X$ esetén*

$$\mathcal{I}_\xi = \{a \in \mathcal{A} \,:\, \pi(a)\xi = 0\}$$

maximális balideál $\mathcal{A}$-ban.

B i z o n y í t á s. Az könnyen látható, hogy a fenti halmaz balideál. Mivel $1 \notin \mathcal{I}_\xi$, ezért ő valódi ideál. A maximalitáshoz legyen $b \notin \mathcal{I}_\xi$. Ekkor $\pi(b)\xi \neq 0$ és az 1.6.2. Tételből adódóan $\pi(\mathcal{A}b)\xi = X$. Ezért tetszőleges $t \in \mathcal{A}$ esetén létezik olyan $a \in \mathcal{A}$, melyre $\pi(ab)\xi = \pi(t)\xi$, azaz $ab - t \in \mathcal{I}_\xi$. Ebből rögtön kapjuk, hogy $\mathcal{A}b + \mathcal{I}_\xi = \mathcal{A}$. Az $\mathcal{I}_\xi$ maximalitása innen azonnal adódik.

1.6.8. Tétel. *Tetszőleges $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ ideálra $\mathcal{P}$ pontosan akkor primitív, ha létezik olyan $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ maximális balideál, melyre $\mathcal{P} = (\mathcal{L} : \mathcal{A})$.*

B i z o n y í t á s. Az előző megjegyzésből adódik az elegendőség. Legyen most $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ primitív ideál és legyen $\pi : \mathcal{A} \to L(X)$ irreducibilis reprezentáció, melynek magja $\mathcal{P}$. Ha $0 \neq x \in X$ tetszőleges vektor, akkor az $\mathcal{I}_x$ maximális balideálra (lásd 1.6.7. Állítás) $\mathcal{P} = (\mathcal{I}_x : \mathcal{A})$. Valóban, $\pi(a) = 0$ akkor és csak akkor ha $\pi(a)\pi(t)x = 0$ minden $t \in \mathcal{A}$ esetén.

1.6.9. Tétel. *Primitív ideál megegyezik az őt tartalmazó maximális balideálok metszetével.*

B i z o n y í t á s. Legyen $\mathcal{P}$ primitív ideál. Ha $x \notin \mathcal{P}$, akkor van egy olyan π irreducibilis reprezentációja az $\mathcal{A}$ algebrának egy X vektortéren, melyre $\pi(x) \neq 0$. Ekkor létezik olyan $\xi \in X$ nemzérus vektor, hogy $\pi(x)\xi \neq 0$. Tehát x nem eleme az $\mathcal{I}_\xi$ maximális balideálnak (lásd 1.6.7. Állítás). Az állítás visszamaradó része triviális.

1.6.10. Definíció. Az $\mathcal{A}$ Jacobson-radikálján az $\mathcal{A}$ összes primitív ideáljának a metszetét értjük. Jelölése: $\operatorname{rad}(\mathcal{A})$. Ha $\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$, akkor $\mathcal{A}$-t féligegyszerűnek nevezzük.

1.6.11. Tétel. *Az $\mathcal{A}$ Jacobson-radikálja megegyezik az $\mathcal{A}$ maximális balideáljainak a metszetével.*

B i z o n y í t á s. Mivel minden primitív ideál az őt tartalmazó maximális balideálok metszete, így $\operatorname{rad}(\mathcal{A})$ tartalmazza az összes maximális balideál metszetét. Másrészt ha $x \in \operatorname{rad}(\mathcal{A})$ akkor tetszőleges $\mathcal{L}$ maximális balideálra $x \in (\mathcal{L} : \mathcal{A})$. Ezért $x\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$, ahonnan $x \in \mathcal{L}$ következik tetszőleges $\mathcal{L}$ maximális balideálra.

1.6.12. Megjegyzés. A fenti tétel miatt a Jacobson-radikálnak az 1.5.13. Definícióban és az 1.6.10. Definícióban adott fogalma kommutatív Banach-algebrák esetén egybeesik.

1.6.13. Tétel. *Az $\mathcal{A}$ radikáljára fennáll, hogy*

$$\begin{aligned}\operatorname{rad}(\mathcal{A}) &= \{x \in \mathcal{A} : 1 - xz \textit{ invertálható minden } z \in \mathcal{A} \textit{ esetén}\}\\ &= \{x \in \mathcal{A} : 1 - xz \textit{ invertálható minden } z \in \mathcal{A} \textit{ esetén}\}.\end{aligned}$$

A tétel bizonyításához szükségünk lesz az alábbi lemmákra és állításra.

1.6.14. Lemma. *Tetszőleges $x, y \in \mathcal{A}$ esetén $1 - xy$ pontosan akkor invertálható, ha $1 - yx$ invertálható.*

Bizonyítás. Legyen $1 - xy$ invertálható és jelölje u az inverzét. Ekkor

$$(1 - yx)(1 + yux) = 1 + yux - yx - yxyux =$$

$$1 + y(u - 1 - xyu)x = 1 + y((1 - xy)u - 1)x = 1.$$

Hasonlóan látható be, hogy $(1 + yux)(1 - yx) = 1$.

1.6.15. Lemma. *Ha $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ olyan balideál, melyre $1 - x$ balinvertálható minden $x \in \mathcal{L}$ esetén, akkor $1 - x$ invertálható minden $x \in \mathcal{L}$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathcal{L}$. Ekkor van olyan y, melyre $(1 - y)(1 - x) = 1$. Ebből $yx - x - y = 0$ következik. Ezért $y \in \mathcal{L}$ és így $1 - y$-nak van jobbinverze. Mivel $1-y$-nak van balinverze is, kapjuk, hogy $1-y$ invertálható, ami maga után vonja az $1-x$ invertálhatóságát.

1.6.16. Állítás. *Ha $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ valódi balideál, akkor $\mathcal{L}$ benne van az $\mathcal{A}$ egy maximális balideáljában.*

Bizonyítás. Világos, hogy valódi balideál nem tartalmazza az egységelemet. Ebből a megállapításból és a Zorn-lemmából adódik az állítás.

1.6.17. Lemma. *Ha $x \in \operatorname{rad}(\mathcal{A})$, akkor $1 - x$ invertálható.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $1-x$ nem balinvertálható. Ekkor $1-x$ benne van $\mathcal{A}(1-x)$ valódi balideálban, ami belefoglalható egy $\mathcal{L}$ maximális balideálba (1.6.16. Állítás). Mivel $x \in \operatorname{rad}(\mathcal{A})$, így az 1.6.11. Tétel miatt $x \in \mathcal{L}$, s ezért $1 \in \mathcal{L}$ is teljesül, ami ellentmondás. Tehát a $\operatorname{rad}(\mathcal{A})$ balideál minden x elemére $1 - x$ balinvertálható. Innen az 1.6.15. Lemma felhasználásával adódik az állítás.

Az 1.6.13. Tétel bizonyítása. Ha $x \in \operatorname{rad}(\mathcal{A})$, akkor $zx \in \operatorname{rad}(\mathcal{A})$ minden $z \in \mathcal{A}$ esetén, s ezért $1-zx$ invertálható ($z \in \mathcal{A}$). Tegyük most fel, hogy $x \notin \operatorname{rad}(\mathcal{A})$. Ekkor van olyan $\pi : \mathcal{A} \to L(X)$ irreducibilis reprezentáció, melyre $\pi(x) \neq 0$. Ha $0 \neq \xi \in X$ olyan, hogy $\pi(x)\xi \neq 0$, akkor π irreducibilitása miatt létezik olyan $z \in \mathcal{A}$, melyre $\pi(z)\pi(x)\xi = \xi = \pi(1)\xi$. Innen $\pi(1 - zx)\xi = 0$ következik, ahonnan kapjuk, hogy $1 - zx$ nem lehet invertálható.

1.7 Banach-algebrák reprezentációi

A fejezet további részében $\mathcal{A}$ egységelemes Banach-algebrát jelöl.

1.7.1 . Állítás. *Az $\mathcal{A}$ maximális balideáljai zártak.*

B i z o n y í t á s. Lásd az 1.5.6. Állítás bizonyítását.

1.7.2 . Állítás. *Az $\mathcal{A}$ primitív ideáljai zártak, így* $\operatorname{rad}(\mathcal{A})$ *is zárt.*

B i z o n y í t á s. Az 1.6.9. Tételből következik.

1.7.3 . Tétel. *Az $\mathcal{A}$ radikálja megegyezik az $\mathcal{A}$ Banach-terek korlátos lineáris operátainak algebráin történő irreducibilis reprezentációi magjainak metszetével.*

B i z o n y í t á s. Az $\mathcal{A}$ radikálja egyenlő az $\mathcal{A}$ primitív ideáljainak metszetével. Ha $\mathcal{P}$ primitív ideál, akkor az 1.6.8. Tétel miatt $\mathcal{P} = (\mathcal{L} : \mathcal{A})$ valamely $\mathcal{L}$ maximális balideálra, ami az 1.6.6. Megjegyzés miatt egyenlő az $\mathcal{A}$-nak az $\mathcal{A}/\mathcal{L}$ lineáris operátorain vett bal reguláris reprezentáció magjával. Mivel $\mathcal{L}$ maximális, így $\mathcal{L}$ zárt. Tehát $\mathcal{A}/\mathcal{L}$ Banach-tér, és könnyen belátható, hogy a balszorzás operátorok mind korlátosak. A bizonyítás evvel teljes.

1.7.4 . Tétel. *Az $\mathcal{A}$ radikáljára*

$$\begin{aligned}\operatorname{rad}(\mathcal{A}) &= \{x : \sigma(zx) = \{0\}\} = \{x : \sigma(xz) = \{0\}\}\\ &= \{x : r(zx) = 0\} = \{x : r(xz) = 0\}.\end{aligned}$$

B i z o n y í t á s. Tudjuk, hogy $x \in \operatorname{rad}(\mathcal{A})$ pontosan akkor teljesül ha $1 - zx$ invertálható minden $z \in \mathcal{A}$ esetén (1.6.13. Tétel). Ez avval egyenértékű, hogy $zx - \lambda$ invertálható minden $z \in \mathcal{A}$ és $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ esetén, ami pontosan akkor áll fenn ha $\sigma(zx) = \{0\}$. A második egyenlőség teljesen hasonlóan látható be.

1.7.5 . Tétel. *Legyen $x \in \mathcal{A}$. Ekkor x spektruma megegyezik az*

$$\bigcup\{\sigma(\pi(x)) : \pi : \mathcal{A} \to B(X) \text{ irreducibilis reprezentáció valamely } X \text{ Banach-tér korlátos lineáris operátorain}\}$$

halmazzal.

B i z o n y í t á s. Mivel irreducibilis reprezentációnál az 1 képe I, így elegendő azt megmutatni, hogy x pontosan akkor invertálható, ha $\pi(x)$ invertálható minden, a tétel megfogalmazásában szereplő reprezentációra. A szükségesség nyilvánvaló. Az elegendőséghez tegyük fel, hogy $\pi(x)$ minden esetben invertálható de x nem invertálható. Tegyük fel, hogy x balról nem invertálható. Ekkor x benne van egy $\mathcal{L}$ maximális balideálban. Legyen π a bal reguláris reprezentációja $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{A}/\mathcal{L}$-en, ami irreducibilis reprezentáció az $\mathcal{A}/\mathcal{L}$ Banach-tér korlátos lineáris operátorainak algebráján (lásd 1.6.6. Megjegyzés). Mivel $\pi(x)\overline{1} = \overline{x} = \overline{0}$, így adódik, hogy $\pi(x)$ nem invertálható, ami ellentmondás. Az x tehát balról invertálható. Jelölje y az x balinverzét és legyen $xy - 1 = u$. Ezen u vagy eleme az $\mathcal{A}$ radikáljának, vagy nem. Ha $u \in \operatorname{rad}(\mathcal{A})$, akkor $1 + u$ invertálható (1.6.13. Tétel), tehát xy invertálható, amiből következik x jobbról invertálhatósága. Ha $u \notin \operatorname{rad}(\mathcal{A})$, akkor a 1.7.3. Tétel miatt van olyan π irreducibilis reprezentációja $\mathcal{A}$-nak egy Banach-tér korlátos lineáris operátorain, melyre $\pi(u) \neq 0$. Mivel $u = xy - 1$, így $ux = xyx - x = x - x = 0$. Tehát $\pi(u)\pi(x) = 0$. Mivel azonban $\pi(x)$ feltételünk szerint invertálható, így $\pi(u) = 0$ adódik, ami ellentmondás. A bizonyítás evvel teljes.

1.7.6. Tétel. (Schur) *Legyen X Banach-tér és $\pi : \mathcal{A} \to B(X)$ irreducibilis reprezentáció. Ekkor $\pi(\mathcal{A})$ kommutánsára $B(X)$-ben teljesül, hogy*

$$\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I.$$

B i z o n y í t á s. Világos, hogy $\pi(\mathcal{A})'$ zárt részalgebrája $B(X)$-nek. Legyen $0 \neq T \in B(X)$ olyan operátor, ami felcserélhető minden $\pi(x)$ ($x \in \mathcal{A}$) operátorral. Könnyen adódik, hogy T értékkészlete és magja invariáns altere $\pi(\mathcal{A})$-nak. Az irreducibilitás miatt T szürjektív és injektív. Ezért T invertálható $B(X)$-ben. Mivel $T\pi(x) = \pi(x)T$ ($x \in \mathcal{A}$), így T^{-1}-gyel való balról illetve jobbról történő szorzás után adódik, hogy $T^{-1} \in \pi(\mathcal{A})'$. Tehát a $\pi(\mathcal{A})'$ Banach-algebra minden nemzérus eleme invertálható. Innen a Gelfand-Mazur tétel (1.2.10. Tétel) bizonyítása miatt következik az állítás.

1.7.7. Következmény. *Kommutatív Banach-algebra minden irreducibilis reprezentációja Banach-téren 1-dimenziós.*

B i z o n y í t á s. Schur tétele és a kommutativitás miatt minden $\pi(x)$ skalár operátor X-en. Innen az irreducibilitás miatt X 1-dimenziós.

1.7.8. Tétel. (Jacobson sűrűségi tétel) *Ha $\pi : \mathcal{A} \to B(X)$ folytonos irreducibilis reprezentáció, akkor tetszőleges $x_1, \ldots, x_n \in X$ független vektorrendszer és $y_1, \ldots, y_n \in X$ esetén létezik olyan $a \in \mathcal{A}$, melyre*

$$\pi(a)x_1 = y_1, \ldots, \pi(a)x_n = y_n.$$

B i z o n y í t á s. Ha $n = 1$, akkor az állítás következik az 1.6.2. Tételből.

$n > 1$ esetén a bizonyítás több lépésben történik. Először azt látjuk be, hogy ha $x_1, x_2 \in X$ független vektorok, akkor van olyan $a \in \mathcal{A}$, melyre $\pi(a)x_1 = 0, \pi(a)x_2 \neq 0$. Tegyük fel indirekt, hogy $\pi(a)x_1 = 0$ maga után vonja, hogy $\pi(a)x_2 = 0$. Az 1.6.7. Állítás jelöléseivel ez azt jelenti, hogy $\mathcal{I}_{x_1} \subset \mathcal{I}_{x_2}$. Mivel ezen balideálok maximálisak, így megegyeznek. Jelölje ezen közös balideált $\mathcal{L}$ és tekintsük az $\mathcal{A}/\mathcal{L}$ Banach-teret. Legyen

$$T_1(\overline{a}) = \pi(a)x_1 \quad \text{és} \quad T_2(\overline{a}) = \pi(a)x_2 \quad (a \in \mathcal{A}).$$

Könnyen belátható, hogy $T_1, T_2 : \mathcal{A}/\mathcal{L} \to X$ jóldefiniált korlátos lineáris operátor $\mathcal{A}/\mathcal{L}$-en. Ezek mindegyike injektív és a π irreducibilitása miatt szürjektív is. Tekintsük a $T_2T_1^{-1} \in B(X)$ operátort. Kapjuk, hogy egyrészt

$$\pi(a)T_2T_1^{-1}\pi(b)x_1 = \pi(a)T_2\overline{b} = \pi(a)\pi(b)x_2 = \pi(ab)x_2,$$

másrészt

$$T_2T_1^{-1}\pi(a)\pi(b)x_1 = T_2T_1^{-1}\pi(ab)x_1 = T_2\overline{ab} = \pi(ab)x_2 \qquad (a, b \in \mathcal{A}).$$

Mivel $\pi(b)x_1$ $(b \in \mathcal{A})$ az irreducibilitás miatt befutja az X-et, így kapjuk, hogy $T_2T_1^{-1} \in \pi(\mathcal{A})'$. Schur tétele miatt $T_2T_1^{-1} \in \mathbb{C}I$. Ezért $T_2 = \lambda T_1$ valamely nemzérus λ skalárra, amiből azt kapjuk, hogy $\pi(a)x_2 = \lambda\pi(a)x_1$ minden $a \in \mathcal{A}$ esetén. Innen $a = 1$ választásával kapjuk, hogy x_1 és x_2 lineáris függőek, ami ellentmondás. Tehát van olyan $a \in \mathcal{A}$, melyre $\pi(a)x_1 = 0$ és $\pi(a)x_2 \neq 0$.

Lássuk most be, hogy ha $x_1, \ldots, x_n \in X$ független vektorrendszer, akkor létezik olyan $a \in \mathcal{A}$ melyre

$$\pi(a)x_1 = 0, \ldots, \pi(a)x_{n-1} = 0, \pi(a)x_n \neq 0.$$

Ez $n = 2$ esetén igaz, hiszen ezt bizonyítottuk be az előzőekben. Feltesszük, hogy állításunk igaz $n-1$-re és belátjuk, hogy ekkor igaz n-re is. Az indukciós feltevés miatt létezik olyan $a \in \mathcal{A}$, melyre

$$\pi(a)x_1 = 0, \ldots, \pi(a)x_{n-2} = 0, \pi(a)x_{n-1} \neq 0.$$

Ha $\pi(a)x_{n-1}$ és $\pi(a)x_n$ függetlenek, akkor a bizonyítás előző része miatt található olyan $b \in \mathcal{A}$ melyre

$$\pi(b)\pi(a)x_{n-1} = 0 \text{ és } \pi(b)\pi(a)x_n \neq 0.$$

Ekkor ba választásával készen vagyunk. Ha most $\pi(a)x_{n-1}$ és $\pi(a)x_n$ lineárisan függőek, akkor valamely λ skalárra fennáll, hogy $\lambda\pi(a)x_{n-1} = \pi(a)x_n$. Mivel $x_1, \ldots, x_{n-2}, \lambda x_{n-1} - x_n$ is lineárisan független, így az indukciós feltevés miatt létezik olyan $b \in \mathcal{A}$, melyre

$$\pi(b)x_1 = 0, \ldots, \pi(b)x_{n-2} = 0, \lambda\pi(b)x_{n-1} - \pi(b)x_n \neq 0.$$

Ha $\pi(b)x_{n-1} = 0$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel ezért, hogy $\pi(b)x_{n-1} \neq 0$. Ha $\pi(b)x_{n-1}$ és $\pi(b)x_n$ független, akkor hasonlóan az előzőekhez, ismét készen vagyunk. Tegyük fel ezért, hogy $\mu\pi(b)x_{n-1} = \pi(b)x_n$ valamely μ skalárra. Mivel $\lambda\pi(b)x_{n-1} - \pi(b)x_n \neq 0$, így $\mu \neq \lambda$. Mivel $\pi(b)x_{n-1} \neq 0$, ezért a π irreducibilitása miatt létezik olyan $c \in \mathcal{A}$, melyre

$$\pi(c)\pi(b)x_{n-1} = \pi(a)x_{n-1}.$$

Legyen most $d = cb - a$. Ekkor

$$\pi(d)x_1 = 0, \ldots, \pi(d)x_{n-2} = 0, \pi(d)x_{n-1} = 0$$

(ez utóbbi egyenlőség d választása miatt áll fenn) és

$$\pi(d)x_n = \pi(c)\pi(b)x_n - \pi(a)x_n = \mu\pi(c)\pi(b)x_{n-1} - \lambda\pi(a)x_{n-1} =$$

$$\mu\pi(a)x_{n-1} - \lambda\pi(a)x_{n-1} = (\mu - \lambda)\pi(a)x_{n-1} \neq 0.$$

Ezzel a bizonyítás második lépésében megfogalmazott állítást beláttuk.

A tétel állítására térve, minden $i = 1, \ldots, n$ esetén van olyan $a_i \in \mathcal{A}$, hogy a $\pi(a_i)x_1, \ldots, \pi(a_i)x_n$ közül pontosan a $\pi(a_i)x_i$ nem zérus. Az irreducibilitás miatt van olyan $b_i \in \mathcal{A}$, melyre $\pi(b_i)\pi(a_i)x_i = y_i$. Tekintsük most a $b_1a_1 + \ldots + b_na_n$ elemét $\mathcal{A}$-nak. Ez rendelkezik a tételben megfogalmazott tulajdonsággal.

1.7.9 . Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy Jacobson tételéből a folytonossági feltétel elhagyható. Be lehet ugyanis látni, hogy $\mathcal{A}$ minden irreducibils reprezentációja valamely Banach-tér korlátos operátorainak algebráján automatikusan folytonos (lásd [4, Theorem 7, 128. oldal]).

1.8 Derivációk és automorfizmusok

1.8.1 . Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy algebra. A $d : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ lineáris leképezést derivációnak nevezzük, ha

$$d(xy) = (dx)y + x(dy) \qquad (x, y \in \mathcal{A}).$$

1.8.2 . Példa. Könnyű látni, hogy ha $a \in \mathcal{A}$ tetszőleges elem, akkor a

$$d_a(x) = ax - xa \qquad (x \in \mathcal{A})$$

módon értelmezett leképezés deriváció. Ezt az a által generált belső derivációnak nevezzük.

Az is egyszerűen leellenőrizhető, hogy az $\mathcal{A}$ algebra deriváciéinak halmaza Lie-algebra, azaz derivációk összege és skalárszorosa, valamint a d_1, d_2 derivációk Lie-szorzata, azaz a

$$[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1$$

módon definiált leképezés is deriváció.

1.8.3. Példa. Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes algebra és legyen $a \in \mathcal{A}$ nem algebrai elem, azaz olyan, melyre $1, a, a^2, \ldots$ lineárisan független. Legyen $\mathcal{B}$ az $1, a$ elemek által generált részalgebra és legyen $d : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ a következőképpen definiált

$$d(\lambda_0 + \lambda_1 a + \ldots + \lambda_n a^n) = \lambda_1 + 2\lambda_2 a + \ldots + n\lambda_n a^{n-1}.$$

Ekkor d deriváció $\mathcal{B}$-n, ami nem belső, hiszen $\mathcal{B}$ kommutatív és $d \neq 0$.

1.8.4. Állítás. *Legyen d deriváció az $\mathcal{A}$ algebrán. Ekkor*

$$(d^n)(xy) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (d^{n-k}x)(d^k y) \qquad (x, y \in \mathcal{A}).$$

Ha $(d^2)(x) = 0$, akkor $(d^n)(x^n) = n!(dx)^n$.

B i z o n y í t á s. Az állítás első része teljes indukcióval könnyen belátható.

Tekintsük most a másodikat. Ha $d(dx) = (d^2)(x) = 0$, akkor teljes indukcióval kapjuk, hogy $d(dx)^k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Legyen $n \geq 2$. Tegyük fel, hogy $d^{n-1}(x^{n-1}) = (n-1)!(dx)^{n-1}$. Előző észrevételünk miatt $d^n(x^{n-1}) = 0$. Az állítás első részéből következik, hogy

$$d^n(x^n) = d^n(xx^{n-1}) =$$

$$\binom{n}{0}(d^n x)x^{n-1} + \binom{n}{1} d^{n-1}(x)d(x^{n-1}) + \ldots + \binom{n}{n-1}(dx)d^{n-1}(x^{n-1}) + \binom{n}{n} x d^n(x^{n-1}) =$$

$$0 + \ldots + 0 + \binom{n}{n-1}(dx)d^{n-1}(x^{n-1}) + 0 = n!(dx)^n.$$

1.8.5. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy algebra. A $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ lineáris leképezést automorfizmusnak nevezzük, ha multiplikatív bijekció. Ha $\mathcal{A}$ egységelemes és $a \in \mathcal{A}$ invertálható, akkor a

$$\phi_a(x) = axa^{-1} \qquad (x \in \mathcal{A})$$

módon definiált leképezés automorfizmus, amit az a által generált belső automorfizmusnak nevezünk.

1.8.6. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ Banach-algebra. Jelölje $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ az $\mathcal{A}$ folytonos automorfizmusainak csoportját. Legyen $\alpha : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ folytonos függvény és tegyük fel, hogy $\alpha(t+s) = \alpha(t)\alpha(s)$ $(t, s \in \mathbb{R})$. Ekkor azt mondjuk, hogy α az $\mathcal{A}$ folytonos automorfizmusainak egy folytonos egyparaméteres csoportja. A szokásoknak megfelelően, a továbbiakban $\alpha(t)$ helyett inkább az α_t jelölést használjuk.

1.8.7. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ Banach-algebra. Az $\mathcal{A}$ tetszőleges d folytonos deriválciója esetén tekintsük az $\alpha^d : t \mapsto e^{td}$ $(t \in \mathbb{R})$ leképezést. Ekkor α^d az $\mathcal{A}$ folytonos automorfizmusainak egy folytonos egyparaméteres csoportja. Továbbá a $d \mapsto \alpha^d$ transzformáció bijekció az $\mathcal{A}$ folytonos deriválcióinak halmazáról az $\mathcal{A}$ folytonos automorfizmusai folytonos egyparaméteres csoportjainak halmazára.*

B i z o n y í t á s. Legyen d az $\mathcal{A}$ folytonos deriválciója. Könnyen látható, hogy az $\alpha^d(t) = e^{td}$ $(t \in \mathbb{R})$ módon értelmezett α^d függvény folytonos és értékei invertálható folytonos lineáris transzformációk $\mathcal{A}$-n. Legyen $x, y \in \mathcal{A}$. Ekkor

$$(e^{td})(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(td)^n(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((td)^{n-k}x)((td)^k y) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{(n-k)!}(td)^{n-k}x \right) \left(\frac{1}{k!}(td)^k y \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}(td)^n x \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}(td)^n y \right) =$$

$$(e^{td})(x)(e^{td})(y).$$

Innen következik, hogy $\alpha^d(t)$ automorfizmus. Az $\alpha^d(t+s) = \alpha^d(t)\alpha^d(s)$ összefüggés az exponenciális függvény tulajdonságaiból adódik.

Az állítás második részéhez jelölje log a $\log 1 = 1$ feltétellel normált logaritmuságat a komplex számsík 1 középpontú egységnyi sugarú nyílt D körlapján, azaz legyen log az a holomorf függvény D-n, melyre $e^{\log z} = z$ és $\log 1 = 0$. Könnyen adódik, hogy ekkor $\log z^n = n \log z$ $(z \in D)$. Innen következik, hogy tetszőleges Banach-algebra tetszőleges olyan x elemére melyre x, x^n spektruma a fenti körlapban helyezkedik el, teljesül, hogy $\log x^n = \log x$, valamint $e^{\log x} = x$. Legyen most α az $\mathcal{A}$ folytonos automorfizmusainak egy folytonos egyparaméteres csoportja. Ekkor $\alpha_0 = I$ miatt létezik olyan $0 < \epsilon < 1$ szám, melyre $|t| < \epsilon$ esetén $\|I - \alpha_t\| < 1$. Ebből következik, hogy ilyen t-kre az α_t spektruma D-be esik, azaz definiálható a $\delta(t) = \log \alpha_t$ transzformáció, ami folytonos t-ben. Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $|nt| < \epsilon$, akkor kapjuk, hogy

$$\delta(nt) = \log \alpha_{nt} = \log \alpha_t^n = n \log \alpha_t = n\delta(t).$$

Innen könnyen adódik, hogy $\delta(st) = s\delta(t)$ valahányszor $|t| < \epsilon$ és $s \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. A $\delta(t)$-nek t-ben való folytonossága miatt kapjuk, hogy a fenti összefüggés teljesül tetszőleges

$s \in [0,1]$ szám esetén is. Ha most $0 < t < \epsilon$ tetszőleges, akkor adódik, hogy a $d = (1/t)\delta(t)$ transzformáció nem függ t-től. Világos, hogy $e^{td} = e^{\delta(t)} = \alpha_t$ $(0 \leq t < \epsilon)$, ahonnan az α egyparaméteres csoport volta miatt könnyen kapjuk, hogy

$$e^{td} = \alpha_t \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Be kell látnunk, hogy d deriváció. Ehhez megmutatjuk, hogy d generátora az α egyparaméteres csoportnak, azaz teljesül, hogy

$$d = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha_t - I}{t}.$$

Valóban, mivel

$$\frac{\alpha_t - I}{t} = \frac{e^{td} - I}{t} =$$

$$\frac{(td)^1}{t1!} + \frac{(td)^2}{t2!} + \frac{(td)^3}{t3!} + \ldots = d + \frac{td^2}{2!} + \frac{t^2 d^3}{3!} + \ldots,$$

és ezen sor konvergens minden t esetén, így a hatványsor összegfüggvényének folytonossága miatt kapjuk, hogy $t \to 0$ esetén a jobb oldal határértéke éppen d. Lássuk be ezek után, hogy d valóban deriváció. Ez az alábbi számolásból következik:

$$d(xy) = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha_t(xy) - xy}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\alpha_t(x) \frac{\alpha_t(y) - y}{t} + \frac{\alpha_t(x) - x}{t} y \right) = xd(y) + d(x)y.$$

Már csak azt kell megmutatni, hogy adott α_t folytonos egyparaméteres csoporthoz tartozó olyan d deriváció, melyre $e^{td} = \alpha_t$ $(t \in \mathbb{R})$ egyértelműen meghatározott. Ez abból adódik, hogy az e^{td}, mint t-beli hatványsor összegfüggvénye, egyértelműen meghatározza hatványsorának együtthatóit.

1.8.8. Tétel. (Singer-Wermer) *Legyen $\mathcal{A}$ kommutatív Banach-algebra és $d : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ folytonos deriváció. Ekkor $dx \in \operatorname{rad}(\mathcal{A})$ minden $x \in \mathcal{A}$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}$. Mivel λd folytonos deriváció minden $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén, így a 1.8.7. Tétel miatt $e^{\lambda d}$ folytonos automorfizmus. Ezért minden λ komplex számra

$$x \longmapsto \varphi(e^{\lambda d} x)$$

multiplikatív lineáris funkcionál, s így

$$|\varphi(e^{\lambda d} x)| \leq \|x\|.$$

Ez azt jelenti, hogy rögzített $x \in \mathcal{A}$ mellett a

$$\lambda \longmapsto \varphi(e^{\lambda d} x)$$

egész függvény korlátos. Liouville tétele miatt kapjuk ennek konstans voltát, ami azt jelenti, hogy a λ változóra vonatkozó Taylor-sorában a $\lambda, \lambda^2, \ldots$ együtthatói mind 0-k. A λ együtthatójának 0 voltából kapjuk, hogy $\varphi(dx) = 0$. Mivel ez teljesül minden $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}$ és $x \in \mathcal{A}$ esetén, így az 1.5.8. Tétel miatt $\sigma(dx) = 0$. Innen az 1.5.15. Következmény figyelembe vételével kapjuk az állítást.

Singer és Wermer azt sejtették, hogy a fenti tétel állítása akkor is érvényben marad, ha a folytonossági feltételt elhagyjuk. Ezt a mintegy 30 évig nyitott problémát végül M.P. Thomas oldotta meg 1988-ban.

1.8.9. Tétel. (Thomas) *Legyen $\mathcal{A}$ kommutatív Banach-algebra. Tetszőleges $d : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ deriváció esetén $dx \in \operatorname{rad}(\mathcal{A})$ $(x \in \mathcal{A})$.*

1.8.10. Következmény. *A $C^\infty[a,b]$ algebrán nincs Banach-algebra norma.*

Bizonyítás. Az $f \mapsto f'$ leképezés deriváció. A $C^\infty[a,b]$ algebra féligegyszerű. Valóban, az egy adott pontban eltűnő elemei maximális ideált alkotnak, s ezek metszete $\{0\}$. Ezért, ha algebránkon lenne Banach-algebra norma, akkor $f' = 0$-nak kellene teljesülni minden $f \in C^\infty[a,b]$ esetén, ami nyilvánvaló ellentmondás.

1.8.11. Következmény. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány. Ekkor $H^\infty(D)$ vagy csak konstans függvényeket tartalmaz vagy van benne nem korlátos deriválttal bíró függvény.*

Bizonyítás. Világos, hogy $H^\infty(D)$ kommutatív Banach-algebra. Hasonlóan mint az előző következményben, látható, hogy ez féligegyszerű. Ha tehát minden $H^\infty(D)$-beli függvény deriváltja korlátos lenne, akkor Thomas tétele miatt $f' = 0$ lenne minden $f \in H^\infty(D)$ esetén.

1.8.12. Tétel. (Kleinecke-Širokov-Vidav) *Legyen $\mathcal{A}$ egy Banach-algebra, $d : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ folytonos deriváció és $x \in \mathcal{A}$. Ha dx és x felcserélhetőek, akkor $r(dx) = 0$.*

Bizonyítás. Csak belső deriválciókra bizonyítjuk. Az általános esethez szükség lenne Banach-algebra ún. kettős centralizátorai algebrájának fogalmára. A teljes bizonyításért lásd például [16, 6.4.11. Proposition]. Legyen tehát d valamely $y \in \mathcal{A}$ elemhez tartozó belső deriváció. Ekkor a $d_y x$ és x felcserélhetőségéből egyszerű számolással adódik, hogy $(d_x^2)(y) = 0$. Az 1.8.4. Állítás miatt kapjuk, hogy $(d_x^n)(y^n) = n!(d_x y)^n$. Mivel $d_y x = -d_x y$, ezért

$$r(d_y x) = r(d_x y) = \lim_n \|(d_x y)^n\|^{1/n} = \lim_n (n!)^{-1/n} \|(d_x^n)(y^n)\|^{1/n} \leq \lim_n (n!)^{-1/n} \|d_x\| \|y\| = 0.$$

Világos, hogy az előző tételből következik a Singer-Wermer tétel.

1.8.13. Tétel. (Johnson-Sinclair) *Legyen $\mathcal{A}$ féligegyszerű Banach-algebra. Ekkor $\mathcal{A}$ minden deriválciója folytonos.*

Bizonyítás. Lásd pl. [16, 6.4.19. Corollary].

1.8.14. Tétel. (Johnson) *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ Banach-algebrák, és tegyük fel, hogy $\mathcal{B}$ féligegyszerű. Ekkor minden $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ szürjektív homomorfizmus automatikusan folytonos.*

Bizonyítás. Lásd pl. [2, Corollary 5.5.3].

1.8.15. Megjegyzés. A legegyszerűbb operátoralgebrák és függvényalgebrák deriválciói és automorfizmusai könnyen megadhatók az alábbiak szerint.

Ha X Banach-tér, akkor $B(X)$ minden deriválciója belső, azaz tetszőleges $d : B(X) \to B(X)$ deriváció felírható

$$d(T) = AT - TA \qquad (T \in B(X))$$

alakban valamely $A \in B(X)$ operátorral. Hasonlóan, $B(X)$ minden automorfizmusa is belső. Nevezetesen, ha X, Y Banach-terek és $\phi : B(X) \to B(Y)$ izomorfizmus, akkor létezik olyan $A : Y \to X$ invertálható korlátos lineáris operátor, melyre

$$\phi(T) = ATA^{-1} \qquad (T \in B(X)).$$

A bizonyításokat illetően lásd [6].

Függvényalgebrákra vonatkozóan pedig a következők ismertek. Ha X, Y kompakt Hausdorff-terek, $\phi : C(X) \to C(Y)$ olyan homomorfizmus, melyre $\phi(1) = 1$, akkor létezik olyan $\varphi : Y \to X$ folytonos függvény, melyre

$$\phi(f) = f \circ \varphi \qquad (f \in C(X)).$$

Ha ϕ izomorfizmus, akkor φ homeomorfizmus.

Ami a $C(X)$ deriválcióit illeti, Thomas fenti tétele miatt $C(X)$-en nincs nemzérus deriváció.

2 C^*-algebrák

2.1 Alapfogalmak

2.1.1. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ komplex algebra. A $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ leképezést involúciónak nevezzük $\mathcal{A}$-n, ha

(i) $(x+y)^* = x^* + y^*$;

(ii) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$;

(iii) $(xy)^* = y^* x^*$;

(iv) $x^{**} = x$;

teljesül minden $x, y \in \mathcal{A}$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén. Egy [Banach-] algebrát [Banach-] $*$-algebrának nevezünk, ha adott rajta egy involúció. Az $\mathcal{A}$ Banach $*$-algebrát C^*-algebrának nevezzük, ha teljesül rá az

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \qquad (x \in \mathcal{A}) \tag{2.1}$$

összefüggés.

A fejezet során végig csak egységelemes C^*-algebrákkal foglalkozunk.

2.1.2. Megjegyzés. A fenti definíció egyszerű következménye, hogy tetszőleges C^*-algebrában $1^* = 1$ és $\|1\| = 1$.

2.1.3. Megjegyzés. A '70-es években több éven keresztül volt nyitott probléma az a kérdés, hogy a C^*-algebrák axiómarendszere vajon független-e. Végleges választ, mégpedig nemlegeset, Sebestyén Zoltánnak sikerült adni, aki megmutatta, hogy komplex algebrán minden olyan szeminorma, ami rendelkezik az (2.1)-ben szereplő tulajdonsággal, automatikusan szubmultiplikatív.

2.1.4. Példa. Legyen X egy kompakt Hausdorff-tér. A $C(X)$ függvényalgebra a konjugálással mint involúcióval és a sup-normával kommutatív C^*-algebra. Ha H Hilbert tér, akkor a $B(H)$ operátoralgebra az adjungálással mint involúcióval és az operátornormával C^*-algebra, ami nem kommutatív, ha $\dim H > 1$.

2.1.5. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra és $h, x, u \in \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy

(i) h önadjungált, ha $h^* = h$;

(ii) x normális, ha $x^*x = xx^*$;

(iii) u unitér, ha $u^*u = uu^* = 1$.

2.1.6. Megjegyzés. Ha $x \in \mathcal{A}$ tetszőleges, akkor x előáll $x = h + ik$ alakban, ahol $h, k \in \mathcal{A}$ önadjungált. Valóban, legyen $h = (1/2)(x + x^*)$ és $k = (1/2i)(x - x^*)$.

Vegyük továbbá észre, hogy unitér elem normája 1.

2.1.7. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra. Ekkor a következő állítások igazak.*

(i) $\|x\| = \|x^*\|$ *teljesül minden* $x \in \mathcal{A}$ *esetén.*

(ii) Ha $h \in \mathcal{A}$ *önadjungált, akkor* e^{ih} *unitér.*

(iii) Ha $h \in \mathcal{A}$ *önadjungált, akkor* $\sigma(h) \subset \mathbb{R}$.

(iv) $r(x^*x) = \|x\|^2$ *tetszőleges* $x \in \mathcal{A}$ *esetén. Ha* $x \in \mathcal{A}$ *normális, akkor* $r(x) = \|x\|$.

(v) Ha $x, y \in \mathcal{A}$ *normális, akkor* $\Delta(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \|x - y\|$, *így a spektrum egyenletesen folytonos a normális elemek halmazán (lásd az 1.4. szakaszt).*

Bizonyítás. Mivel $\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|$, így $\|x\| \leq \|x^*\|$. Ha itt x helyébe x^*-ot írunk, akkor kapjuk a másik irányú egyenlőtlenséget, azaz $\|x^*\| \leq \|x\|$. Ezzel beláttuk (i)-et.

A (ii)-höz legyen $h \in \mathcal{A}$ önadjungált. Az exponenciális függvény hatványsorát tekintve könnyen látszik, hogy ha $u = e^{ih}$, akkor $u^* = e^{-ih}$. Ezek után a holomorf függvénykalkulus tulajdonságaiból már azonnal adódik, hogy $u^*u = uu^* = 1$.

Legyen most $h \in \mathcal{A}$ önadjungált. Tegyük fel, hogy $\alpha + i\beta \in \sigma(h)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Legyen $k = (1/\beta)(h - \alpha 1)$. Ekkor $k = k^*$ és $i \in \sigma(k)$. Innen adódik, hogy $(k + i\lambda 1) - (i\lambda + i)1 = k - i1$ nem invertálható. Mivel a spektrálsugár kisebb vagy egyenlő a normánál, ezért $|\lambda + 1| = |i\lambda + i| \leq \|k + i\lambda 1\|$. Ebből tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(\lambda + 1)^2 \leq \|k + i\lambda 1\|^2 = \|(k + i\lambda 1)^*(k + i\lambda 1)\| = \|k^2 + \lambda^2 1\|.$$

Mivel $\|k^2 + \lambda^2 1\| \leq \|k^2\| + \lambda^2$, így azt kapjuk, hogy $2\lambda + 1 \leq \|k^2\|$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Ez azonban nyilvánvaló ellentmondás, s így adódik (iii).

A spektrálsugár-formula miatt kapjuk, hogy

$$r(x^*x) = \lim_n \|(x^*x)^n\|^{1/n} = \lim_n \|(x^*x)^{2^n}\|^{1/2^n}.$$

Könnyű látni, hogy $\|(x^*x)^{2^n}\|^{1/2^n} = \|x\|^2$. Ezért $r(x^*x) = \|x\|^2$ teljesül. Legyen most $x \in \mathcal{A}$ normális. Mivel a spektrálsugár a felcserélhető elemeken szubmultiplikatív, így

$\|x\|^2 = r(x^*x) \leq r(x^*)r(x) = r(x)^2$. Azonban $r(x) \leq \|x\|$ tetszőleges elemre teljesül, ahonnan az $r(x) = \|x\|$ összefüggést kapjuk.

Lássuk végül az (v) bizonyítását. Tegyük fel indirekt, hogy $\Delta(\sigma(x), \sigma(y)) > \|x - y\|$. A Hausdorff-távolság definíciója miatt az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy létezik olyan $\lambda \in \sigma(x)$, melyre $\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(y)) > \|x - y\|$. Az 1.3.16. Tétel miatt $\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(y)) = 1/r((y - \lambda 1)^{-1})$. Mivel y normális, így kapjuk, hogy

$$\|(x - \lambda 1) - (y - \lambda 1)\| = \|x - y\| < \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(y)) = \frac{1}{\|(y - \lambda 1)^{-1}\|}.$$

Innen adódik, hogy

$$\|(x - \lambda 1)(y - \lambda 1)^{-1} - 1\| < 1.$$

Ez azonban a 1.2.1. Tétel miatt azt jelenti, hogy $(x - \lambda 1)(y - \lambda 1)^{-1}$ invertálható. Ebből az következik, hogy $x - \lambda 1$ is invertálható, s ez ellentmondás. A tétel bizonyítása ezzel teljes.

2.1.8. Következmény. *Minden C^*-algebra féligegyszerű.*

Bizonyítás. A radikálnak az 1.7.4. Tételben adott jellemzése szerint

$$\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = \{x : r(zx) = 0 \, (z \in \mathcal{A})\}.$$

A 2.1.7. Tétel (iv) része miatt $\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$, azaz $\mathcal{A}$ féligegyszerű.

2.1.9. Megjegyzés. A 2.1.7. Tétel (iv) részéből azonnal adódik az a fontos észrevétel, hogy ha egy algebrán megadható egy C^*-algebra norma, akkor az egyértelmű.

Továbbá (iii) és (iv) összevetéséből kapjuk, hogy tetszőleges h önadjungált elem esetén, $\sigma(h)$ tartalmazza a $\|h\|, -\|h\|$ számok valamelyikét.

Az alábbi tétel a C^*-algebrák önadjungált elemeinek metrikus jellemzését adja.

2.1.10. Tétel. (Vidav-Palmer) *Legyen $x \in \mathcal{A}$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) *x önadjungált;*

(ii) $\|1 + itx\| = 1 + t\omega(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, *ahol* $\lim_{t \to 0} \omega(t) = 0$;

(iii) $\|e^{itx}\| = 1$ *minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. Megjegyezzük, hogy a tétel segítségével tetszőleges, involúcióval el nem látott Banach-algebrában is lehetséges értelmezni az önadjungáltságot.

2.2 Kommutatív C^*-algebrák

2.2.1. Definíció. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ *-algebrák. A $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ lineáris leképezést *-homomorfizmusnak nevezzük, ha

(i) $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$;

(ii) $\phi(x)^* = \phi(x^*)$

teljesül minden $x, y \in \mathcal{A}$ esetén.

2.2.2. Tétel. (Gelfand-Naimark) *Legyen $\mathcal{A}$ kommutatív egységelemes C^*-algebra és $\hat{\mathcal{A}}$ az $\mathcal{A}$ struktúratere. Ekkor az*

$$x \longmapsto \hat{x}, \qquad \hat{x}(\varphi) = \varphi(x) \quad (\varphi \in \hat{\mathcal{A}})$$

*Gelfand-transzformáció izometrikus *-izomorfizmusa $\mathcal{A}$-nak $C(\hat{\mathcal{A}})$-ra.*

Bizonyítás. A Gelfand-transzformációról tudjuk, hogy algebra-homomorfizmus. Bizonyítsuk be először, hogy megőrzi a * műveletet. Mivel önadjungált elem spektruma valós, így $\hat{h}(\varphi) = \varphi(h) \in \sigma(h) \subset \mathbb{R}$. Tehát $\hat{h}$ valós függvény. Ha most $x \in \mathcal{A}$ tetszőleges, akkor felírható $x = h + ik$ alakban, ahol $h, k \in \mathcal{A}$ önadjungált. Innen kapjuk, hogy

$$\overline{\hat{x}} = \overline{\widehat{h + ik}} = \overline{\hat{h} + i\hat{k}} = \hat{h} - i\hat{k} = \widehat{h - ik} = \widehat{x^*}.$$

Mivel $\hat{x}$ normája éppen az x spektrálsugara és $\mathcal{A}$ minden eleme normális, így a 2.1.7. Tétel (iv) pontjának felhasználásával adódik, hogy

$$\|\hat{x}\|_\infty = r(x) = \|x\|,$$

ami a Gelfand-transzformáció izometrikusságát mutatja. Mivel ezen transzformáció értékkészlete olyan részalgebrája $C(\hat{\mathcal{A}})$-nak, ami szeparálja $\hat{\mathcal{A}}$ pontjait, tartalmazza az azonosan 1 függvényt és önadjungált, így a Stone-Weierstrass tétel miatt ez a részalgebra sűrű $C(\mathcal{A})$-ban. Ezt a transzformáció izometrikusságával összevetve kapjuk a szürjektivitást. A bizonyítás ezzel teljes.

2.3 A folytonos függvénykalkulus

2.3.1. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra, $h \in \mathcal{A}$ önadjungált elem. Ekkor egyértelműen létezik olyan izometrikus *-homomorfizmusa $C(\sigma(h))$-nek $\mathcal{A}$-ba, melynél az azonosan 1 függvény képe 1, az identikus függvényé pedig h. A fenti leképezés értékkészlete $\mathcal{A}$-nak azon legszűkebb C^*-részalgebrája, ami tartalmazza az $1, h$ elemeket.*

B i z o n y í t á s. A 2.1.7. Tételből tudjuk, hogy h spektruma valós. Tetszőleges, a $\sigma(h)$-n értelmezett komplex együtthatós p polinomhoz rendeljük hozzá $p(h)$-t. Világos, hogy ezzel a hozzárendeléssel a fenti polinomok algebrájának egy *-homomorfizmusát definiáltuk $\mathcal{A}$-ba. A holomorf függvénykalkulusnál megismert spektrálleképezési tétel miatt $p(\sigma(h)) = \sigma(p(h))$. Mivel $p(h)$ normális elem, így normája megegyezik a spektrálsugarával. Ezért $\|p(h)\| = r(p(h)) = \sup_{\lambda\in\sigma(h)} |p(\lambda)| = \|p\|_\infty$. Ez azt jelenti, hogy a $p \mapsto p(h)$ leképezés izometrikus *-homomorfizmus, ami a Stone-Weierstrass tétel miatt egyértelmű módon terjeszthető ki $C(\sigma(h))$-ra izometrikus *-homomorfizmussá. Az egyértelműség és az értékkészletre vonatkozó állítás ezek után világos.

2.3.2. Megjegyzés. A h önadjungáltságát a Stone-Weierstrass tétel alkalmazásánál használtuk ki. Ugyanis a komplex sík kompakt részhalmazai esetén a komplex polinomok nem feltétlenül vannak sűrűn a folytonos függvények terében, ellentétben az $\mathbb{R}$ kompakt részhalmazaival.

2.3.3. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra és $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ egy, az egységelemet tartalmazó zárt *-részalgebra. Ha $x \in \mathcal{B}$, akkor*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{B}}(x).$$

B i z o n y í t á s. Legyen $x \in \mathcal{B}$. Azt kell megmutatnunk, hogy x pontosan akkor invertálható $\mathcal{B}$-ben, ha invertálható $\mathcal{A}$-ban. Mivel a szükségesség világos, így azt kell belátni, hogy x-nek az $\mathcal{A}$-beli invertálhatóságából következik, hogy $x^{-1} \in \mathcal{B}$. Legyen először x önadjungált. Mivel $0 \notin \sigma_{\mathcal{A}}(x)$, a $t \mapsto t^{-1}$ függvény eleme $C(\sigma_{\mathcal{A}}(x))$-nek. A 2.3.1. Állítást felhasználva kapjuk, hogy ezen függvény képe (ami éppen x inverze) eleme $\mathcal{B}$-nek.

Legyen most $x \in \mathcal{B}$ tetszőleges és tegyük fel, hogy x invertálható $\mathcal{A}$-ban. Ekkor a bizonyítás első része miatt x^*x inverze, $(x^*x)^{-1} = y$ eleme $\mathcal{B}$-nek. Mivel $(yx^*)x = 1$, így kapjuk, hogy $x^{-1} = yx^* \in \mathcal{B}$. A bizonyítás ezzel teljes.

2.3.4. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra, $x \in \mathcal{A}$ normális elem és jelölje $C^*(x)$ az 1 és x által generált kommutatív C^*-részalgebrát. Ekkor egyértelműen létezik olyan izometrikus *-izomorfizmusa $C(\sigma(x))$-nek $C^*(x)$-re, melynél az azonosan 1 függvény képe 1, az identikus függvényé pedig x.*

B i z o n y í t á s. Nuilvánvaló, hogy

$$C^*(x) = \overline{\{p(x, x^*) \,:\, p \text{ kétváltozós komplex polinom}\}}. \tag{2.2}$$

Jelölje $\mathcal{X}$ a $C^*(x)$ struktúraterét. Megmutatjuk, hogy a

$$\varphi \longmapsto \varphi(x) \tag{2.3}$$

leképezés homeomorfizmusa $\mathcal{X}$-nek $\sigma(x)$-re. Tudjuk, hogy tetszőleges kommutatív Banach-algebra esetén a karaktereknek egy adott elemen felvett értékei az adott elem spektrumát futják be. Így a fenti leképezés értékkészlete az x-nek $C^*(x)$-re vonatkozó spektruma, ami viszont a 2.3.3. Tétel miatt éppen $\sigma(x)$. Innen kapjuk az (2.3)-beli leképezés szürjektivitását. Az injektivitáshoz legyen $\varphi(x) = \psi(x)$ valamely $\varphi, \psi \in \mathcal{X}$ karakterek esetén. A karakterek önadjungáltsága (ami abból adódik, hogy kommutatív C^*-algebrák esetén a Gelfand-transzformáció *-izomorfizmus) és folytonossága miatt kapjuk, hogy φ és ψ megegyezik $C^*(x)$-en, azaz $\varphi = \psi$. A (2.3) leképezés folytonos is, mivel a karakterek terén a topológia a pontonkénti konvergencia topológiája. Kompakt Hausdorff-terek közötti folytonos bijekció azonban homeomorfizmus. Így adódik, hogy a (2.3) leképezés, azaz $\hat{x} : \mathcal{X} \to \sigma(\S)$ homeomorfizmus.

Tekintsük ezek után az

$$y \longmapsto \hat{y} \circ \hat{x}^{-1}$$

leképezését $C^*(x)$-nek $C(\sigma(x))$-be. Mivel a Gelfand-transzformáció izometrikus *-izomorfizmusa $C^*(x)$-nek $C(\mathcal{X})$-be és $\hat{x}$ homeomorfizmusa $\mathcal{X}$-nek $\sigma(x)$-re, kapjuk, hogy a fenti leképezés izometrikus *-izomorfizmusa $C^*(x)$-nek $C(\sigma(x))$-re. Ezen leképezés inverzét véve kapjuk az állításban megfogalmazott leképezés létezését.

Az egyértelműség a $C^*(x)$ szerkezetére a (2.2)-ben tett észrevételből adódik a Stone-Weierstrass tétel segítségével.

2.3.5 . Definíció. Az előző tétel feltételei és jelölései mellett az állításban szereplő leképezést az x elemhez tartozó folytonos függvénykalkulusnak nevezzük. Ezen leképezésnél egy tetszőleges $f \in C(\sigma(x))$ függvény képét $f(x)$-szel jelöljük.

2.3.6 . Megjegyzés. Könnyű megmutatni, hogy a folytonos függvénykalkulus a holomorf függvénykalkulus kiterjesztése az alábbi értelemben: Ha $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra, $x \in \mathcal{A}$ normális elem és $\sigma(x) \subset U \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, akkor tetszőleges $f \in H(U)$ esetén f holomorf függvénykalkulus szerinti képe megegyezik az $f_{|\sigma(x)}$ folytonos függvénykalkulus szerinti képével. Valóban, a Runge-tétel miatt létezik olyan racionális függvényekből álló (R_n) sorozat, ami U kompakt részhalmazain egyenletesen konvergál f-hez és R_n pólusai $\mathbb{C} \setminus U$-ban vannak ($n \in \mathbb{N}$). A holomorf függvénykalkulus folytonossági tulajdonsága miatt $R_n(x) \to f(x)$. Mivel az $R_n(x)$ mind a holomorf függvénykalkulus, mind a folytonos függvénykalkulus szerinti értelemben ugyanaz az $\mathcal{A}$-beli elem, és $R_{n|\sigma(x)} \to f_{|\sigma(x)}$ egyenletesen, így a folytonos függvénykalkulus folytonossága miatt $R_{n|\sigma(x)}(x) \to f_{|\sigma(x)}(x)$. Az állítás ezután már világos.

2.3.7 . Tétel. (Spektrálleképezési tétel) *Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra, $x \in \mathcal{A}$ normális elem és $f \in C(\sigma(x))$. Ekkor*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)),$$

továbbá, ha $g \in C(\sigma(f(x)))$, akkor

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

B i z o n y í t á s. Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$. Ekkor $\lambda \notin f(\sigma(x))$ akkor és csak akkor, ha $(f - \lambda 1)$-nek nincs zérushelye $\sigma(x)$-ben. Ez pontosan akkor áll fenn, ha az $f - \lambda 1$ függvény invertálható $C(\sigma(x))$-ben. A 2.3.4. Tétel miatt ez pedig azzal ekvivalens, hogy $f(x) - \lambda 1$ invertálható $C^*(x)$-ben, ami a 2.3.3. Tétel miatt az $(f(x) - \lambda 1)$-nek $\mathcal{A}$-ban való invertálhatóságával, azaz $\lambda \notin \sigma(f(x))$-szel egyenértékű.

Térjünk most rá a második állításra. A tétel első része miatt $(g \circ f)(x)$ és $g(f(x))$ is értelmes. Ha most $g(z) = p(z, \overline{z})$, ahol p kétváltozós komplex polinom, akkor a $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ összefüggés igaz a folytonos függvénykalkulus algebrai tulajdonságai miatt. A Stone-Weierstrass tétel következtében azonban a fenti típusú függvények sűrűn vannak $C(f(\sigma(x)))$-ben. Így a folytonos függvénykalkulus folytonosságára való hivatkozással kapjuk az állítást.

2.4 A folytonos függvénykalkulus néhány alkalmazása

2.4.1. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra és $x \in \mathcal{A}$ normális elem. Ekkor x pontosan akkor önadjungált, ha spektruma valós. Az $y \in \mathcal{A}$ normális elem akkor és csak akkor unitér, ha spektruma része a komplex egységkörnek.*

B i z o n y í t á s. Az x spektruma pontosan akkor valós, ha rajta az identikus függvény egyenlő a konjugáltjával. Ez pedig a folytonos függvénykalkulus algebrai tulajdonságai miatt azzal egyenértékű, hogy $x = x^*$. Az állítás második része hasonlóan egyszerű.

2.4.2. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra és $x \in \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy x pozitív, ha önadjungált és spektruma része a nemnegatív valós számok $\mathbb{R}_+$ halmazának. Ekkor az $x \geq 0$ jelölést használjuk. Az $\mathcal{A}$ pozitív elemeinek halmazát $\mathcal{A}^+$-szal jelöljük.

2.4.3. Lemma. *Legyen h önadjungált eleme az $\mathcal{A}$-nak. Ekkor léteznek olyan $h^+, h^- \in \mathcal{A}$ pozitív elemek, melyekre $h = h^+ - h^-$ és $h^+h^- = h^-h^+ = 0$.*

B i z o n y í t á s. Tekintsük a h-hoz tartozó folytonos függvénykalkulusnál az identikus függvény pozitív, illetve negatív részének képét és használjuk a függvénykalkulus algebrai tulajdonságait, valamint a spektrálleképezési tételt.

2.4.4. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra. Ekkor*

(i) $\mathcal{A}^+$ *zárt kúp;*

(ii) $\mathcal{A}^+ \cap (-\mathcal{A}^+) = \{0\}$*;*

(iii) $x^*x \in \mathcal{A}^+$ *minden* $x \in \mathcal{A}$ *esetén.*

B i z o n y í t á s. Tekintsük először az (i) állítást. Ha $a \in \mathcal{A}^+$, akkor $\lambda a \in \mathcal{A}^+$ nyilvánvalóan teljesül minden λ nemnegatív valós szám esetén. Legyen $a, b \in \mathcal{A}^+$. Ekkor $a + b$ önadjungált, s így a 2.1.7. Tétel (iii) része miatt $\sigma(a + b) \subset \mathbb{R}$. Legyen $\alpha = \|a\|$ és $\beta = \|b\|$. Ekkor $\sigma(a) \subset [0, \alpha]$ és $\sigma(b) \subset [0, \beta]$, továbbá

$$\sigma(-a + \alpha 1) \subset [0, \alpha], \qquad \sigma(-b + \beta 1) \subset [0, \beta].$$

Mivel önadjungált elem normája megegyezik a spektrálsugarával (2.1.7. Tétel (iv) része), így kapjuk, hogy $\|a - \alpha 1\| = r(-a + \alpha 1) \leq \alpha$ és hasonlóan $\|b - \beta 1\| \leq \beta$. Innen adódik, hogy

$$\|(a + b) - (\alpha + \beta)1\| \leq \alpha + \beta.$$

Mivel $a + b$ spektruma valós, ezért a fenti egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $|\lambda - (\alpha + \beta)| \leq \alpha + \beta$ minden $\lambda \in \sigma(a+b)$ esetén. Innen kapjuk, hogy $\sigma(a+b) \subset \mathbb{R}_+$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{A}^+$ kúp. A zártsághoz legyen (a_n) egy sorozat $\mathcal{A}^+$-ban, ami konvergál az $a \in \mathcal{A}$ elemhez. Mivel minden a_n önadjungált, így az involúció izometrikussága miatt a is önadjungált. A $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+$ tartalmazás a spektrum normális elemeken való folytonosságából adódik (2.1.7. Tétel (v) része).

A (ii) állításhoz legyen $a \in \mathcal{A}^+ \cap (-\mathcal{A}^+)$. Világos, hogy $\sigma(a) = \{0\}$. Mivel az egyedüli normális kvázinilpotens (azaz 0 spektrálsugarú) elem a 0 (2.1.7. Tétel (iv)), így $a = 0$.

A tétel (iii) részéhez tekintsük az x^*x önadjungált elemnek a 2.4.3. Lemma állításában szereplő pozitív elemek különbségére történő felbontását: $x^*x = u - v$. Ekkor $uv = vu = 0$ miatt $vx^*xv = -v^3$. Legyen $y = xv$. Világos, hogy $y^*y = -v^3 \in -\mathcal{A}^+$, ugyanis pozitív elem akármilyen természetes kitevőjű hatványa pozitív. Az 1.6.14. Lemma miatt tetszőleges a, b elem esetén ab spektrumának nemzérus elemei megegyeznek a ba spektrumának nemzérus elemeivel. Ezt alkalmazva kapjuk, hogy $yy^* \in -\mathcal{A}^+$. Ezért $y^*y + yy^* \in -\mathcal{A}^+$. Legyen most $y = h + ik$, ahol $h, k \in \mathcal{A}$ önadjungált. Ekkor egyszerű számolás mutatja, hogy $y^*y + yy^* = 2(h^2 + k^2)$, ami viszont pozitív. Innen tételünk előző része miatt kapjuk, hogy $y^*y + yy^* = 0$. Mivel $h^2 + k^2 = 0$, ugyancsak a (ii) miatt kapjuk, hogy $h^2 = k^2 = 0$, ahonnan $h = k = 0$. Ezért $y = 0$, s ebből $v = 0$ adódik. Tehát $x^*x = u \in \mathcal{A}^+$.

A bizonyítás ezzel teljes.

2.4.5 . Megjegyzés. Az $\mathcal{A}$ önadjungált elemei között a pozitivitás segítségével bevezethető egy természetes parciális rendezés a következőképpen: Ha $h, k \in \mathcal{A}$ önadjungált,

akkor legyen $h \leq k$ definíció szerint pontosan akkor, ha $k - h$ pozitív. A 2.4.4. Tétel állításai mutatják, hogy ezen reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.

2.4.6. Tétel. *Legyen $x \in \mathcal{A}$ pozitív. Ekkor egyértelműen létezik olyan pozitív $y \in \mathcal{A}$ elem, melyre $y^2 = x$. Továbbá y felcserélhető minden, az x-szel felcserélhető elemmel.*

Bizonyítás. Mivel x normális és spektruma része $\mathbb{R}_+$-nak, így véve a $\lambda \mapsto \sqrt{\lambda}$ függvény folytonos függvénykalkulus szerinti képét, olyan $y \in \mathcal{A}$ elemet kapunk, amelynek négyzete x. Világos, hogy y önadjungált és a spektrálleképezési tétel miatt $\sigma(y) \subset \mathbb{R}_+$. Tehát $y \geq 0$.

Az egyértelműséghez legyen $z \in \mathcal{A}^+$ olyan, hogy $z^2 = x$. Ekkor $zx = z^3 = xz$. Innen kapjuk, hogy $zp(x) = p(x)z$ teljesül minden p polinomra. Mivel a gyökfüggvény x spektrumán egyenletesen approximálható polinomokkal (Stone-Weierstrass tétel), így adódik, hogy $zy = yz$. Tekintsük most az $1, y, z$ elemek által generált kommutatív C^*-részalgebrát, $C^*(y, z)$-t. Mivel $y^2 = z^2$, így a Gelfand-transzformáció tulajdonságai miatt $\hat{y}^2 = \hat{z}^2$. Továbbá, mivel y, z spektruma nemnegatív, így $\hat{y}, \hat{z}$ nemnegatív függvények. Következésképpen $\hat{y} = \hat{z}$, amiből $y = z$ adódik.

Legyen most $a \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $ax = xa$. Ekkor a fenti érvelés első részét megismételve kapjuk, hogy $ap(x) = p(x)a$ minden p polinomra, majd pedig, hogy $ay = ya$. A bizonyítás ezzel teljes.

2.4.7. Megjegyzés. A fenti tételben szereplő y-t az x pozitív négyzetgyökének nevezzük és $\sqrt{x}$-szel jelöljük. Ha $x \in \mathcal{A}$ tetszőleges, akkor x^*x négyzetgyökét x abszolút értékének nevezzük és az $|x|$ jelölést használjuk.

2.4.8. Következmény. *Az $a \in \mathcal{A}$ elem pontosan akkor pozitív, ha felírható $a = x^*x$ alakban valamely $x \in \mathcal{A}$ esetén.*

Bizonyítás. A 2.4.4. Tétel (*iii*) pontjából és a 2.4.6. Tételből következik.

2.4.9. Tétel. *Tetszőleges C^*-algebra megegyezik unitér elemeinek lineáris burkával.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathcal{A}$. Mivel x felírható $x = h + ik$ alakban, ahol h, k önadjungált, így feltehetjük, hogy x önadjungált. A tétel állítását tekintve az is feltételezhető, hogy $\|x\| \leq 1$. Mivel ekkor $\sigma(x) \subset [-1, 1]$, a spektrálleképezési tétel miatt $1 - x^2$ spektruma része $\mathbb{R}_+$-nak, tehát $1 - x^2 \geq 0$. Tekintsük $\sqrt{1 - x^2}$-et és legyen

$$u = x + i\sqrt{1 - x^2}.$$

Mivel a 2.4.6. Tétel miatt $\sqrt{1 - x^2}$ felcserélhető x-szel, így egyszerű számolás mutatja, hogy u unitér és

$$x = \frac{1}{2}(u + u^*).$$

Az előző tétel finomítható az alábbi módon.

2.4.10. Tétel. (Gardner) *Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra és $x \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $\|x\| < 1$. Ekkor léteznek olyan $u_1, \ldots, u_n$ unitér elemek, melyekre*

$$x = \frac{1}{n}(u_1 + \ldots + u_n).$$

Bizonyítás. Lásd [2, Theorem 6.2.13].

Ebből azonnal adódik az alábbi

2.4.11. Következmény. (Russo-Dye) *Tetszőleges C^*-algebra nyílt egységgömbje benne van az unitér elemek halmazának konvex burkában. Így a zárt egységgömb megegyezik az unitér elemek halmaza konvex burkának lezártjával.*

2.4.12. Tétel. (Fuglede) *Legyen $x, y \in \mathcal{A}$ és legyen x normális. Ha $xy = yx$, akkor $x^*y = yx^*$.*

Bizonyítás. Mivel $\lambda x - (\lambda x)^*$ tetszőleges $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén felírható ih alakban valamely $h \in \mathcal{A}$ önadjungált elemmel, így az

$$f(\lambda) = e^{\lambda x - (\lambda x)^*} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

módon értelmezett függvény értékei unitérek (2.1.7. Tétel (*ii*) része) és teljesül rájuk, hogy $f(\lambda)^* = f(-\lambda)$. Az x és y felcserélhetőségéből adódik, hogy $e^{\lambda x}y = ye^{\lambda x}$. A függvénykalkulus algebrai tulajdonságaiból, a komplex exponenciális függvény multiplikativitása miatt kapjuk, hogy

$$e^{-(\lambda x)^*}ye^{(\lambda x)^*} = e^{-(\lambda x)^*}e^{\lambda x}ye^{-\lambda x}e^{(\lambda x)^*} = f(\lambda)yf(-\lambda).$$

Így a

$$g(\lambda) = e^{-\lambda x^*}ye^{\lambda x^*} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

módon értelmezett differenciálható függvényre adódik, hogy

$$\|g(\lambda)\| = \|f(\bar{\lambda})yf(-\bar{\lambda})\| \leq \|f(\bar{\lambda})\|\|y\|\|f(-\bar{\lambda})\| = \|y\|,$$

tehát g korlátos. A Liouville-tétel miatt g konstans, mégpedig konstans y. Innen kapjuk, hogy

$$ye^{\lambda x^*} = e^{\lambda x^*}y \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Az $e^{\lambda x^*}$-ot hatványsor alakjában felírva, a hatványsor együtthatóinak egyértelműsége miatt ebből már kapjuk az állítást.

2.4.13. Megjegyzés. A fenti gondolatmenet alkalmas annak a formálisan általánosabb állításnak a belátására is, miszerint ha $x, y \in \mathcal{A}$ normális és $z \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $xz = zy$, akkor $x^*z = zy^*$.

2.4.14. Tétel. *Legyen N normális operátor a H Hilbert-téren. A λ komplex szám pontosan akkor eleme N spektrumának, ha minden $\epsilon > 0$ esetén létezik olyan $x \in H$ egységvektor, melyre $\|Nx - \lambda x\| < \epsilon$. Az N spektrumának izolált pontjai sajátértékei N-nek.*

Bizonyítás. Legyen T normális operátor. Ekkor

$$\langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle$$

miatt $\|T^*x\| = \|Tx\|$ $(x \in H)$. Azt állítjuk, hogy T pontosan akkor invertálható $B(H)$-ban, ha T alulról korlátos, azaz létezik olyan $c > 0$ szám, hogy $\|Tx\| \geq c\|x\|$ $(x \in H)$. Valóban, ha T invertálható a $B(H)$-ban, akkor az

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|,$$

becslésből kapjuk az állítás első részét. Ha most T alulról korlátos, akkor $\|Tx\| \geq c\|x\|$ miatt T injektív és zárt értékkészletű. Ez utóbbihoz legyen (Tx_n) Cauchy-sorozat T értékkészletében. A T alulról korlátossága miatt ebből azonnal adódik, hogy (x_n) is Cauchy-sorozat, ami H teljessége miatt konvergál egy $x \in H$ vektorhoz. Innen T folytonossága miatt kapjuk, hogy $Tx_n \to Tx$. Tehát T értékkészlete teljes, s így zárt. Mivel T normalitása miatt $\|T^*x\| \geq c\|x\|$ $(x \in H)$ is teljesül, ezért T^* is injektív. Ebből azonban a jól ismert $(\ker T^*)^\perp = \overline{\operatorname{rng} T}$ összefüggés miatt következik, hogy T sűrű értékkészletű. Így kapjuk, hogy T bijekció, ami Banachnak a korlátos inverzről szóló tétele miatt azt jelenti, hogy T invertálható $B(H)$-ban.

Ezek után, mivel $N - \lambda I$ normális operátor, az előzőek miatt kapjuk, hogy $N - \lambda I$ pontosan akkor nem invertálható, ha nem alulról korlátos, azaz tetszőleges pozitív ϵ-hoz van olyan $x \in H$ egységvektor, melyre $\|Nx - \lambda x\| < \epsilon$. A tétel első állítását ezzel beláttuk.

Ami a második állítást illeti, legyen λ izolált pontja $\sigma(N)$-nek és tekintsük az

$$f(z) = \begin{cases} 1, & \text{ha } z = \lambda, \\ 0, & \text{ha } z \neq \lambda, \quad z \in \sigma(N) \end{cases}$$

módon értelmezett függvényt. A λ izoláltsága miatt f folytonos $\sigma(N)$-en. Mivel $f = \overline{f}$ és $f = f^2$, így a folytonos függvénykalkulus tulajdonságai miatt $f(N)$ egy nemzérus projekció, melyre az $(id - \lambda 1)f = 0$ összefüggés miatt

$$(N - \lambda I)f(N) = 0$$

teljesül. Innen következik, hogy λ sajátértéke N-nek.

2.4.15. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér és $A \in B(H)$. Az A operátor pontosan akkor pozitív, ha $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ teljesül minden $x \in H$ vektorra.*

Bizonyítás. Ha $A \in B(H)$ pozitív, akkor van pozitív négyzetgyöke $B(H)$-ban. Legyen ez $B \in B(H)$. Ekkor

$$\langle Ax, x\rangle = \langle BBx, x\rangle = \langle Bx, Bx\rangle \geq 0.$$

Az állítás megfordításához tegyük fel, hogy $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ teljesül minden $x \in H$ vektorra. Ekkor

$$\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle x, Ax\rangle = \langle A^*x, x\rangle \qquad (x \in H).$$

Jól ismert, hogy komplex Hilbert-téren ha az S, T lineáris operátorokra $\langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle$ teljesül minden $x \in H$ estén, akkor $S = T$. Így kapjuk, hogy A önadjungált. Ha $\lambda \in \sigma(A)$, akkor a 2.4.14. Tétel miatt létezik egységvektoroknak egy olyan (x_n) sorozata, melyre $\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0$. A Schwarz-egyenlőtlenség miatt ebből adódik, hogy $\langle Ax_n - \lambda x_n, x_n\rangle \to 0$. Ezért $\langle Ax_n, x_n\rangle \to \lambda$. Innen kapjuk, hogy $\lambda \geq 0$. Tehát A olyan önadjungált operátor, amelynek spektruma része $\mathbb{R}_+$-nak. Ez éppen azt jelenti, hogy A pozitív.

2.4.16. Definíció. Legyen U korlátos lineáris operátor a H Hilbert-téren. Ha léteznek olyan $M, N \subset H$ zárt alterek, hogy

$$U|M \text{ izometria } M\text{-ről } N\text{-re}, \quad \text{és} \quad U|M^\perp = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy U parciális izometria M-ről N-re.

2.4.17. Megjegyzés. Az előző definíció jelöléseivel nem nehéz megmutatni, hogy U^*U éppen az M-re történő ortogonális projekció, míg UU^* az N-re való ortogonális projekció operátora.

Az is belátható, hogy egy tetszőleges $V \in B(H)$ operátor pontosan akkor parciális izometria, ha teljesül rá a $VV^*V = V$ összefüggés.

2.4.18. Tétel. (Poláris felbontás) *Legyen $T \in B(H)$. Ekkor létezik olyan $U \in B(H)$ parciális izometria, melyre*

$$T = U|T|. \tag{2.4}$$

Itt az U egyértelműen meghatározott a $\ker U = \ker T$ feltétel által. Továbbá ezen parciális izometriára teljesül, hogy $U^*U|T| = |T|$, $U^*T = |T|$ és $UU^*T = T$. A szóbanforgó parciális izometriával a (2.4) előállítást T poláris felbontásának nevezzük.

B i z o n y í t á s. Definiáljuk U-t a következőképpen. A $|T|$ értékkészletén legyen

$$U|T|x = Tx \qquad (x \in H).$$

Az U jóldefiniáltságához megjegyezzük, hogy $\ker|T| = \ker T$. Ez abból következik, hogy

$$\||T|x\|^2 = \langle |T|x, |T|x\rangle = \langle |T|^2x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2 \quad (x \in H).$$

Ugyanez az egyenlőség mutatja, hogy U izometrikus $|T|$ értékkészletén. Ezek után kiterjesztjük U-t először $|T|$ értékkészletének lezártjára izometriaként, majd pedig annak ortogonális komplementumán 0-ként definiáljuk. Így kapunk egy olyan U parciális izometriát, melyre $T = U|T|$. Világos, hogy $\ker U = \operatorname{rng}|T|^\perp = \ker|T| = \ker T$.

Az egyértelműséghez megjegyezzük, hogy ha $\ker U = \ker T$, akkor $\ker U = \operatorname{rng}|T|^\perp$.

Végül, ha U jelöli a T poláris felbontásában szereplő parciális izometriát, akkor a 2.4.17. Megjegyzés miatt U^*U a $|T|$ értékkészletének lezártjára történő ortogonális projekció. Ezért $U^*U|T| = |T|$, ahonnan $U^*T = |T|$. Ezen összefüggés mindkét oldalát balról szorozva U-val adódik, hogy $UU^*T = T$.

2.4.19. Tétel. *Ha $T \in B(H)$ invertálható, akkor a poláris felbontásában szereplő parciális izometria unitér.*

B i z o n y í t á s. Csak annyit kell belátnunk, hogy $|T|$ invertálható. Mivel T invertálható, így T^* is az. Ebből adódik a $T^*T = |T|^2$ invertálhatósága, amiből következik $|T|$ invertálhatósága.

2.4.20. Tétel. (Putnam) *Legyen T_1 és T_2 normális operátor a H Hilbert-téren és tegyük fel, hogy létezik olyan $S \in B(H)$ invertálható operátor, melyre*

$$T_1 = ST_2S^{-1}.$$

Ekkor S választható unitérnek. Röviden, hasonló normális operátorok unitér-hasonlóak.

B i z o n y í t á s. A tétel feltételéből azonnal következik, hogy $T_1S = ST_2$. A 2.4.13. Megjegyzés alapján kapjuk, hogy

$$|S|^2T_2 = S^*ST_2 = S^*T_1S = (T_1^*S)^*S = (ST_2^*)^*S = T_2S^*S = T_2|S|^2,$$

tehát T_2 felcserélhető $|S|^2$-tel. A 2.4.6. Tétel második állítása miatt T_2 felcserélhető $|S|$-sel is. Legyen most $S = U|S|$ az S poláris felbontása. Ekkor U unitér, és mivel $|S|$ is invertálható, így

$$UT_2U^{-1} = U|S|T_2|S|^{-1}U^{-1} = ST_2S^{-1} = T_1.$$

2.5 A spektráltétel

2.5.1 . Definíció. Legyen $(X, \mathcal{B})$ mérhető tér, H Hilbert-tér, E pedig a $\mathcal{B}$ egy leképezése $B(H)$-ba, melynek értékei projekciók. E-t spektrálmértéknek nevezzük, ha teljesül rá, hogy

(i) $E(X) = I$;

(ii) a $\mu_{x,y}(.) = \langle E(.)x, y\rangle$ halmazfüggvény komplex mérték minden $x, y \in H$ esetén.

Ha X kompakt Hausdorff-tér és $\mathcal{B}$ az X Borel-halmazainak összessége, akkor E-t regulárisnak nevezzük, amennyiben a $\mu_{x,y}$ mértékek regulárisak minden $x, y \in H$ esetén.

2.5.2 . Példa. Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ egy mértéktér. Tetszőleges $B \in \mathcal{B}$ esetén legyen

$$E(B)f = \chi_B f \qquad (f \in L^2(\mu)).$$

Ekkor E spektrálmérték.

2.5.3 . Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel a következő állítások igazak.*

(i) Ha $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ és $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, akkor $E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2)$.

(ii) Ha $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, akkor $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2)$.

(iii) Ha $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, akkor $E(B_1)$ és $E(B_2)$ felcserélhetőek, és $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ esetén képterük ortogonális egymásra.

(iv) Ha (B_n) diszjunkt mérhető halmazok sorozata és $x \in H$, akkor

$$E(\cup_{n=1}^{\infty} B_n)x = \sum_{n=1}^{\infty} E(B_n)x.$$

B i z o n y í t á s. A bizonyítást több lépésben végezzük el.

Először megmutatjuk, hogy ha $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ olyan, hogy $B_1 \subset B_2$, akkor $\operatorname{rng} E(B_1) \subset \operatorname{rng} E(B_2)$. Valóban, legyen $x \in H$ olyan, hogy $E(B_1)x = x$. Mivel $\mu_{x,x}$ pozitív mérték, így annak monotonitása miatt

$$\|x\|^2 = \langle E(B_1)x, x\rangle \leq \langle E(B_2)x, x\rangle \leq \|E(B_2)x\|\|x\| \leq \|x\|^2,$$

ahonnan $\|E(B_2)x\| = \|x\|$. Mivel $E(B_2)$ projekció, ebből egyszerűen adódik, hogy $E(B_2)x = x$. Így kapjuk, hogy $\operatorname{rng} E(B_1) \subset \operatorname{rng} E(B_2)$.

Most megmutatjuk, hogy ha $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ diszjunktak, akkor $E(B_1)E(B_2) = 0$. Mivel $\mu_{x,y}$ additív minden $x, y \in H$ esetén, így

$$E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2).$$

Ezen egyenlőséget jobbról szorozva $E(B_2)$-vel, az előző lépést felhasználva kapjuk, hogy

$$E(B_2) = E(B_1 \cup B_2)E(B_2) = E(B_1)E(B_2) + E(B_2).$$

Innen következik, hogy $E(B_1)E(B_2) = 0$.

Belátjuk, hogy ha $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, akkor $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2)$. Az

$$E(B_1) = E(B_1 \setminus B_2) + E(B_1 \cap B_2)$$

egyenletet $E(B_2)$-vel jobbról szorozva, a fentiek felhasználásával kapjuk, hogy

$$E(B_1)E(B_2) = E(B_1 \setminus B_2)E(B_2) + E(B_1 \cap B_2)E(B_2) = 0 + E(B_1 \cap B_2).$$

Ezzel beláttuk az (i) és (ii) állításokat. A (iii) közvetlenül adódik (ii)-ből.

Bizonyítsuk be végezetül (iv)-et. Legyen $P = E(\cup_{n=1}^{\infty} B_n)$ és $P_n = \sum_{k=1}^{n} E(B_k) = E(\cup_{k=1}^{n} B_k)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor a spektrálmérték definíciója miatt

$$\langle P_n x, y\rangle \longrightarrow \langle Px, y\rangle \qquad (x, y \in H).$$

Mivel, amint az a bizonyítás első részéből adódik, P_n értékkészlete része P értékkészletének, így kapjuk, hogy $P - P_n$ projekció minden n esetén. Ezért

$$\|(P - P_n)x\|^2 = \langle (P - P_n)x, x\rangle \longrightarrow 0 \qquad (x \in H),$$

s evvel a bizonyítás teljes.

2.5.4. Tétel. *A 2.5.1. Definíció jelöléseivel, ha $f : X \to \mathbb{C}$ korlátos mérhető függvény, akkor egyértelműen létezik olyan $A \in B(H)$ operátor, melyre*

$$\langle Ax, y\rangle = \int_X f d\,\mu_{x,y} \qquad (x, y \in H),$$

és $\|A\| \le \|f\|_\infty$. Továbbá, ha $\epsilon > 0$ és $B_1, ..., B_n$ az X olyan mérhető felosztása, melyre

$$|f(t) - f(s)| \le \epsilon \qquad (t, s \in B_k, k = 1, ..., n),$$

akkor tetszőleges $t_k \in B_k$ $(k = 1, ..., n)$ esetén

$$\|A - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)E(B_k)\| \le \epsilon.$$

B i z o n y í t á s. Először megmutatjuk, hogy a $\mu_{x,y}$ mérték totális variációjára teljesül a $\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\|\|y\|$ becslés. Legyen (B_n) megszámlálható mérhető felosztása X-nek. Felhasználva, hogy E értékei projekciók, a Schwarz-egyenlőtlenség és a 2.5.3. Tétel (iii) és (iv) pontja miatt, a Parseval-egyenlőség figyelembevételével kapjuk a

$$\sum_n |\langle E(B_n)x, y\rangle| = \sum_n |\langle E(B_n)x, E(B_n)y\rangle| \leq \sum_n \|E(B_n)x\|\|E(B_n)y\| \leq$$

$$(\sum_n \|E(B_n)x\|^2)^{1/2}(\sum_n \|E(B_n)y\|^2)^{1/2} = \|x\|\|y\|$$

egyenlőtlenséget. Mivel $\|\mu_{x,y}\|$ éppen a fenti egyenlőtlenség első tagjának supremuma, amint (B_n) befutja X összes megszámlálható mérhető felosztását, kapjuk a kívánt becslést.

Legyen most $f : X \to \mathbb{C}$ rögzített korlátos mérhető függvény. Tekintsük a

$$B_f(x, y) = \int_X f d\,\mu_{x,y} \qquad (x, y \in H)$$

módon definiált függvényt. Az

$$\left|\int_X f d\,\mu_{x,y}\right| \leq \|f\|_\infty \|\mu_{x,y}\| \leq \|f\|_\infty \|x\|\|y\|$$

egyenlőtlenség miatt B_f korlátos sesquilineáris forma. Ez azt jelenti, hogy B_f az első változójában lineáris, a másodikban pedig konjugált-lineáris funkcionál, továbbá $|B_f(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$ teljesül valamely $0 < M \in \mathbb{R}$ számmal. Ismeretes, hogy minden ilyen funkcionál valamely korlátos lineáris operátor által generált, azaz létezik olyan $A \in B(H)$ operátor, melyre $B_f(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ $(x, y \in H)$. Az A egyértelműsége világos. Mivel tetszőleges $T \in B(H)$ esetén $\|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|$, ezért a fentiek miatt kapjuk, hogy $\|A\| \leq \|f\|_\infty$.

Az állítás második részéhez először is megjegyezzük, hogy

$$\|A - \sum_k f(t_k)E(B_k)\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle (A - \sum_k f(t_k)E(B_k))x, y\rangle|.$$

Legyenek $x, y \in H$ egységvektorok. Jelölje f_n a $\sum_k f(t_k)\chi_{B_k}$ egyszerű mérhető függvényt. Ekkor

$$|\langle (A - \sum_k f(t_k)E(B_k))x, y\rangle| = \left|\int_X f d\,\mu_{x,y} - \int_X f_n d\,\mu_{x,y}\right| \leq \|f - f_n\|_\infty \|\mu_{x,y}\| \leq \epsilon\|x\|\|y\|.$$

Innen kapjuk az állítást.

2.5.5 . Definíció. Az előző tételben szereplő A operátort az f függvény E spektrálmérték szerinti spektrálintegráljának nevezzük és $\int_X f d\,E$-vel jelöljük.

2.5.6. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra. Azt mondjuk, hogy ϕ *-reprezentációja $\mathcal{A}$-nak a H Hilbert-téren, ha $\phi : \mathcal{A} \to B(H)$ *-homomorfizmus.

2.5.7. Tétel. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ adott C^*-algebrák. Ha $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *-homomorfizmus, akkor ϕ folytonos és $\|\phi\| \leq 1$. Továbbá, ϕ pontosan akkor izometrikus, ha injektív.*

Bizonyítás. Legyen $h \in \mathcal{A}$ önadjungált. Ekkor $\phi(h)$ is önadjungált. Tekintsük a $\mathcal{B}_0 = \overline{\phi(C^*(h))}$ kommutatív egységelemes C^*-algebrát (ennek egységeleme $\phi(1)$). A $\phi(h)$ normája megegyezik $\mathcal{B}_0$-ra vonatkozó spektrálsugarával (2.1.7. Tétel). A spektrum viszont a karaktereknek az adott elemen felvett értékeiből álló halmaz (1.5.8. Tétel). Ezért

$$\|\phi(h)\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{B}_0} |\varphi(\phi(h))|.$$

Mivel minden $\varphi \in \widehat{\mathcal{B}_0}$ estén $\varphi \circ \phi$ karaktere $C^*(h)$-nak, így

$$|\varphi(\phi(h))| \leq r(h) = \|h\|.$$

Innen adódik, hogy $\|\phi(h)\| \leq \|h\|$. Mivel

$$\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x)^*\phi(x)\| = \|\phi(x^*x)\| \leq \|x^*x\| = \|x\|^2$$

teljesül minden $x \in \mathcal{A}$ esetén, kapjuk a tétel első részét.

Ha ϕ izometrikus, akkor természetesen injektív. Legyen most ϕ injektív és $h \in \mathcal{A}$ önadjungált elem. Ekkor ϕ injektív *-homomorfizmus $C^*(h)$-ról $\mathcal{B}_0$-ba. A Gelfand-Naimark tétel miatt így ϕ felfogható úgy, mint egy $C(X)$ függvényalgebrából egy $C(Y)$ függvényalgebrába képező homomorfizmus, ami az 1-et 1-be képezi. A függvényalgebrák közötti ilyen homomorfizmusok alakja viszont jól ismert (lásd 1.8.15. Megjegyzés). Nevezetesen, létezik olyan $\varphi : Y \to X$ folytonos függvény, melyre $\phi(f) = f \circ \varphi$ minden $f \in C(X)$ esetén. Mivel ϕ injektív, így az Urysohn-lemma miatt könnyen adódik, hogy φ sűrű értékkészletű, s ezért szürjektív, ahonnan viszont azonnal kapjuk, hogy ϕ izometria $C^*(h)$-n. Tehát $\|phi(h)\| = \|h\|$. Ezek után az állítás a

$$\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x)^*\phi(x)\| = \|\phi(x^*x)\| = \|x^*x\| = \|x\|^2 \qquad (x \in \mathcal{A})$$

egyenlőségből adódik.

A 2.5.9. Tétel bizonyításában szükségünk lesz a következő Riesz-féle reprezentációs tételre.

2.5.8. Tétel. (Riesz) *Legyen X kompakt Hausdorff-tér. Ekkor $C(X)$ tetszőleges F korlátos lineáris funkcionáljához egyértelműen létezik olyan μ komplex reguláris Borel-mérték, melyre*

$$F(f) = \int_X f \, d\mu \qquad (f \in C(X)).$$

Az F normája megegyezik a μ totális variációjával. A fenti formula minden μ komplex reguláris Borel-mérték esetén egy korlátos lineáris funkcionált értelmez $C(X)$-en.

Végezetül, ha $F(f) \geq 0$ teljesül minden $f \in C(X)$ nemnegatív függvény esetén, akkor az F-hez tartozó reguláris Borel-mérték pozitív mérték.

B i z o n y í t á s. Lásd [18, 2.14 Theorem és 6.19 Theorem].

2.5.9. Tétel. *Legyen X kompakt Hausdorff-tér, H pedig egy Hilbert-tér. Ha ϕ a $C(X)$ *-reprezentációja H-n melyre $\phi(1) = I$, akkor egyértelműen létezik olyan E reguláris spektrálmérték X Borel-halmazain, melyre*

$$\phi(f) = \int_X f d\, E \qquad (f \in C(X)). \tag{2.5}$$

*Megfordítva, a fenti összefüggés a $C(X)$ egy *-reprezentációját értelmezi minden E reguláris spektrálmérték esetén. Egy $A \in B(H)$ operátor pontosan akkor cserélhető fel ϕ értékkészletével, ha $AE(B) = E(B)A$ teljesül minden $B \subset X$ Borel-halmaz esetén.*

B i z o n y í t á s. Legyen $\phi : C(X) \to B(H)$ *-reprezentáció. A 2.5.7. Tétel miatt ϕ korlátos. Ezért tetszőlegesen rögzített $x, y \in H$ esetén a

$$f \longmapsto \langle \phi(f)x, y \rangle$$

leképezés korlátos lineáris funkcionál $C(X)$-en. A 2.5.8. Tétel miatt minden $x, y \in H$ vektorhoz egyértelműen létezik olyan $m_{x,y}$ komplex reguláris Borel-mérték, melyre

$$\langle \phi(f)x, y \rangle = \int_X f d\, m_{x,y} \qquad (f \in C(X)).$$

Tetszőleges $B \in \mathcal{B}$ Borel-halmaz esetén tekintsük az

$$(x, y) \longmapsto m_{x,y}(B) \tag{2.6}$$

leképezést. Mivel

$$\int_X f d\, m_{x+x',y} = \langle \phi(f)(x + x'), y \rangle = \langle \phi(f)x, y \rangle + \langle \phi(f)x', y \rangle =$$

$$\int_X f d\, m_{x,y} + \int_X f d\, m_{x',y} = \int_X f d\, (m_{x,y} + m_{x',y}) \qquad (f \in C(X)),$$

így a Riesz-féle reprezentációs tétel egyértelműségi része miatt $m_{x+x',y} = m_{x,y} + m_{x',y}$. Tehát a (2.6)-ban szereplő leképezés az első változójában additív. Hasonló gondolatmenetet követve kapjuk, hogy ezen kétváltozós függvény egy sesquilineáris forma. A

2.5.8. Tételnek a funkcionálok és a hozzájuk tartozó mértékek normájának egyenlőségére vonatkozó része miatt kapjuk, hogy

$$|m_{x,y}(B)| \leq \|m_{x,y}\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle \phi(f)x, y\rangle\| \leq \|\phi\|\|x\|\|y\| \leq \|x\|\|y\|,$$

ahol felhasználtuk a 2.5.7. Tételt. Tehát a (2.6)-ban szereplő leképezés korlátos sesquilineáris forma, amihez ezért létezik olyan $E(B)$ korlátos lineáris operátor, melyre

$$\langle E(B)x, y\rangle = m_{x,y}(B) \qquad (x, y \in H).$$

Mivel

$$\int_X f d\, m_{x,y} = \langle \phi(f)x, y\rangle = \langle x, \phi(\bar{f})y\rangle = \overline{\langle \phi(\bar{f})y, x\rangle} = \overline{\int_X \bar{f} d\, m_{y,x}} = \int_X f d\, \overline{m_{y,x}}$$

teljesül minden $f \in C(X)$ függvényre, így $m_{x,y} = \overline{m_{y,x}}$. Ebből következik, hogy az $E(B)$ operátorok önadjungáltak. Legyen most $f \in C(X)$ és $x \in H$. Ekkor $f d\, m_{x,y} = m_{x,\phi(\bar{f})y}$, ugyanis

$$\int_X g f d\, m_{x,y} = \langle \phi(fg)x, y\rangle = \langle \phi(g)x, \phi(\bar{f})y\rangle = \int_X g d\, m_{x,\phi(\bar{f})y}$$

minden $g \in C(X)$ esetén. Ebből adódik, hogy

$$\int_X f\chi_B d\, m_{x,y} = \int_X \chi_B d\, m_{x,\phi(\bar{f})y} = \langle E(B)x, \phi(\bar{f})y\rangle = \langle \phi(f)E(B)x, y\rangle = \int_X f d\, m_{E(B)x,y}.$$

Innen kapjuk, hogy

$$m_{x,y}(B' \cap B) = m_{E(B)x,y}(B'),$$

és így $E(B' \cap B) = E(B')E(B)$ teljesül tetszőleges $B' \subset X$ Borel-halmaz esetén. Ezért E értékei projekciók. Mivel

$$\langle E(X)x, y\rangle = m_{x,y}(X) = \int_X 1 d\, m_{x,y} = \langle \phi(1)x, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

minden $x, y \in H$ esetén, így $E(X) = I$. Tehát E reguláris spektrálmérték X Borel-halmazain és teljesül rá (2.5). Az E egyértelműsége a Riesz-tétel egyértelműségi részének következménye.

Lássuk most a felcserélhetőségre vonatkozó állítást. Az $A \in B(H)$ operátor pontosan akkor cserélhető fel minden $\phi(f)$-fel, ha $\langle \phi(f)Ax, y\rangle = \langle \phi(f)x, A^*y\rangle$ teljesül minden $f \in C(X)$ és $x, y \in H$ esetén. Ez azzal ekvivalens, hogy

$$\int_X f d\, m_{Ax,y} = \int_X f d\, m_{x,A^*y} \qquad (f \in C(X)),$$

ami pontosan azt jelenti, hogy $m_{Ax,y} = m_{x,A^*y}$, azaz

$$\langle E(B)Ax, y\rangle = m_{Ax,y}(B) = m_{x,A^*y}(B) = \langle E(B)x, A^*y\rangle$$

teljesül minden $B \subset X$ Borel-halmaz és $x, y \in H$ esetén. Ez pedig pontosan azzal egyenértékű, hogy A felcserélhető minden $E(B)$-vel.

Végezetül legyen E spektrálmérték X Borel-halmazain és tekintsük a

$$\phi(f) = \int_X f d\, E$$

operátort tetszőleges f korlátos Borel-függvény esetén. Könnyű látni, hogy ϕ *-homomorfizmus az egyszerű mérhető függvények *-részalgebráján. Mivel minden korlátos Borel-függvény egyenletesen approximálható egyszerű függvényekkel, így a 2.5.4. Tételt felhasználva kapjuk, hogy ϕ *-homomorfizmus a korlátos Borel-függvények algebráján, ami tartalmazza $C(X)$-et.

A bizonyítás ezzel teljes.

2.5.10. Tétel. (Spektráltétel) *Legyen N normális operátor a H Hilbert-téren. Ekkor egyértelműen létezik olyan E reguláris spektrálmérték a $\sigma(N)$ Borel-halmazain, melyre*

$$N = \int_{\sigma(N)} \lambda d\, E(\lambda). \tag{2.7}$$

Ha G tetszőleges nemüres $\sigma(N)$-beli nyílt halmaz, akkor $E(G) \neq 0$. Egy $A \in B(H)$ operátor pontosan akkor cserélhető fel N-nel, ha felcserélhető $E(B)$-vel minden $\sigma(N)$-beli B Borel-halmaz esetén.

A (2.7)-ben szereplő spektrálmértéket az N spektrálmértékének, a fenti előállítást pedig az N spektrálfelbontásának nevezzük.

Bizonyítás. Tekintsük az N-hez tartozó folytonos függvénykalkulust. Ez *-reprezentációja $C(\sigma(N))$-nek H-n (2.3.4. Tétel). A 2.5.9. Tétel miatt létezik olyan reguláris spektrálmérték $\sigma(N)$ Borel-halmazain, melyre

$$f(N) = \int_{\sigma(N)} f d\, E \qquad (f \in C(\sigma(N)).$$

Legyen G egy nemüres $\sigma(N)$-beli nyílt halmaz. Ekkor van olyan $f \in C(\sigma(N))$ nemnegatív, nem azonosan 0 függvény, melyre $f \leq \chi_G$. Ha $x \in H$, akkor figyelembe véve, hogy az $\langle E(.)x, x\rangle$ mérték pozitív, kapjuk, hogy $\langle f(N)x, x\rangle \leq \langle E(G)x, x\rangle$. Legyen $g = \sqrt{f}$. Ekkor

$$0 \leq \langle g(N)x, g(N)x\rangle = \langle f(N)x, x\rangle \leq \langle E(G)x, E(G)x\rangle \qquad (x \in H).$$

Mivel $g \neq 0$, így $g(N) \neq 0$. Ebből a fentiek miatt adódik, hogy $E(G) \neq 0$.

Tegyük fel, hogy $A \in B(H)$ felcserélhető N-nel. Ekkor a 2.4.12. Tétel miatt N^* is felcserélhető A-val. Ebből kapjuk, hogy tetszőleges $p(z, \bar{z})$ esetén (ahol p kétváltozós komplex polinom) $p(N, N^*)$ felcserélhető A-val. A Stone-Weierstrass-tétel felhasználásával kapjuk,

hogy $f(N)$ is felcserélhető A-val minden $F \in C(\sigma(N))$ esetén. Az előző tétel miatt innen már adódik a felcserélhetőségre vonatkozó állítást.

Legyen most E' egy másik reguláris spektrálmérték $\sigma(N)$ Borel-halmazain, melyre

$$N = \int_{\sigma(N)} \lambda d\, E'(\lambda).$$

A 2.5.9. Tétel miatt a

$$\phi(f) = \int_{\sigma(N)} f d\, E'$$

összefüggés egy *-reprezentációját definiálja $C(\sigma(N))$-nek H-n, ami az azonosan 1 függvényen és az identikus függvényen megegyezik az N-hez tartozó folytonos függvénykalkulussal. Innen a szóbanforgó leképezések algebrai és folytonossági tulajdonságai miatt a Stone-Weierstrass-tételt felhasználva kapjuk, hogy $\phi(f) = f(N)$ minden $f \in C(\sigma(N))$ esetén. A 2.5.9. Tétel egyértelműségi része miatt adódik, hogy $E = E'$.

A bizonyítás ezzel teljes.

2.5.11 . Megjegyzés. Ismert mértékelméleti eredményekből következik, hogy a komplex számsík tetszőleges kompakt részhalmazának Borel-halmazain értelmezett spektrálmérték automatikusan reguláris.

Ha $U \in B(H)$ unitér operátor, akkor, mivel U spektruma a komplex egységkör része (2.4.1. Állítás), U spektrálfelbontása a következő alakba írható valamely, a $[0, 2\pi]$ Borel-halmazain értelmezett E reguláris spektrálmértékkel:

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} d\, E(\lambda).$$

2.5.12 . Tétel. (Borel-függvénykalkulus) *Legyen $N \in B(H)$ normális operátor és E az N-hez tartozó spektrálmérték. Ekkor az*

$$f(N) = \int_{\sigma(N)} f d\, E$$

módon definiált $f \mapsto f(N)$ leképezés, ahol f tetszőleges korlátos Borel-függvény N spektrumán, rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

*(i) *-homomorfizmus, ami az N-hez tartozó folytonos függvénykalkulus kiterjesztése;*

(ii) $\|f(N)\| \leq \|f\|_\infty$ minden f korlátos Borel-függvény esetén;

(iii) ha $AN = NA$ valamely $A \in B(H)$ operátorra, akkor $Af(N) = f(N)A$ minden f korlátos Borel-függvényre.

B i z o n y í t á s. A 2.5.9. Tétel bizonyításának végén már láttuk, hogy a $\sigma(N)$ korlátos Borel-függvényeinek algebráján értelmezett $f \mapsto f(N)$ leképezés *-homomorfizmus, ami a 2.5.10. Tétel bizonyításának végén közölt gondolatmenet miatt kiterjesztése a folytonos függvénykalkulusnak.

A (ii) a 2.5.4. Tételből adódik.

A (iii)-hoz megjegyezzük, hogy a spektráltétel miatt $AN = NA$ esetén A felcserélhető N spektrálmértékének értékkészletével. Innen a korlátos Borel-függvények egyszerű mérhető függvényekkel történő egyenletes approximálhatóságát felhasználva kapjuk az állítást.

2.5.13. Megjegyzés. A Borel-függvénykalkulus általában nem injektív.

2.5.14. Tétel. *Az $U \in B(H)$ operátor pontosan akkor unitér, ha létezik olyan $S \in B(H)$ önadjungált operátor, hogy $U = e^{iS}$.*

B i z o n y í t á s. Legyen U unitér operátor H-n. Legyen g az $f(t) = e^{it}$ $(t \in \mathbb{R})$ folytonos függvény $[0, 2\pi[$-re való megszorításának az inverze. Világos, hogy g valós Borel-függvény a komplex egységkörön, s így az U spektrumán is. Legyen most $S = g(U)$. A Borel-függvénykalkulus tulajdonságai miatt S önadjungált és

$$U = id(U) = (e^{ig})(U) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ig)^n}{n!}\right)(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ig)^n(U)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iS)^n}{n!} = e^{iS}.$$

A másik irányú állítás világos.

2.5.15. Tétel. *Legyen $N \in B(H)$ normális operátor. Ekkor létezik olyan U unitér operátor, melyre $N = U|N|$.*

B i z o n y í t á s. Legyen $u(\lambda) = \lambda/|\lambda|$ ha $\lambda \neq 0$ és $u(0) = 1$. Világos, hogy u korlátos Borel-függvény és $u\bar{u} = \bar{u}u = 1$. A Borel függvénykalkulus tulajdonságai miatt $u(N)$ unitér operátor. Könnyen látható, hogy $|N| = a(N)$, ahol $a(\lambda) = |\lambda|$. Mivel $u(\lambda)a(\lambda) = \lambda$ teljesül minden $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén, így kapjuk, hogy $U|N| = N$.

2.5.16. Tétel. *A $B(H)$ invertálható elemeinek halmaza ívszerűen összefüggő.*

B i z o n y í t á s. Legyen $T \in B(H)$ tetszőleges invertálható operátor. A 2.4.19. Tétel miatt a $T = U|T|$ poláris felbontásban szereplő U parciális izometria unitér. Mivel $|T|$ ugyancsak invertálható, így spektruma kompakt részhalmaza a $]0, \infty[$ intervallumnak, ahol van logaritmus. Tehát $|T|$ spektrumán az identikus függvény felírható az exponenciális függvény és a logaritmus kompozíciójaként. Ezért $|T| = e^S$ valamely S önadjungált

operátorral. A 2.5.14. Tételt is figyelembe véve T így felírható $T = e^{iH}e^{S}$ alakban, ahol $H, S \in B(H)$ önadjungált operátorok. Tekintsük most a

$$t \longmapsto e^{itH}e^{tS} \qquad (t \in [0,1])$$

(folytonos) görbét. Világos, hogy ez összeköti I-t az T-vel. Az állítás innen már világos.

2.6 Pozitív lineáris funkcionálok

2.6.1 . Definíció. A $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionált pozitívnak nevezzük, ha $\rho(a) \geq 0$ teljesül minden $a \in \mathcal{A}^+$ esetén. A 2.4.8. Következmény miatt ez azzal ekvivalens, hogy $\rho(x^*x) \geq 0$ minden $x \in \mathcal{A}$ esetén.

Nemkommutatív C^*-algebrák esetében a pozitív lineáris funkcionálok hasonlóan fontos szerepet töltenek be, mint a kommutatív algebrák esetén a karakterek. Kommutatív C^*-algebra minden karaktere pozitív. Nemkommutatív algebrákról a karakterek nem szolgáltatnak elégséges információt, ugyanis ilyen algebráknak általában nincsenek nemtriviális multiplikatív lineáris funkcionáljai. Lásd például az $M_n(\mathbb{C})$ $(n > 1)$ matrixalgebra esetét.

Legyen $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ pozitív lineáris funkcionál. Ekkor ρ monoton, azaz ha $h, k \in \mathcal{A}$ önadjungált és $h \leq k$, akkor $\rho(h) \leq \rho(k)$. Valóban, mivel önadjungált elem felírható két pozitív elem különbségeként (2.4.3. Lemma), így $\rho(h), \rho(k)$ valós és $0 \leq k - h$ miatt $0 \leq \rho(k - h)$, ahonnan kapjuk, hogy $\rho(h) \leq \rho(k)$. Mivel ρ önadjungált elemhez valós számot rendel, és tetszőleges $x \in \mathcal{A}$ felírható $x = h + ik$ alakban alkalmas $h, k \in \mathcal{A}$ önadjungált elemmel, így kapjuk, hogy ρ önadjungált, azaz $\rho(x^*) = \overline{\rho(x)}$ teljesül minden $x \in \mathcal{A}$ esetén.

2.6.2 . Tétel. *Legyen $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ pozitív lineáris funkcionál. Ekkor ρ korlátos.*

B i z o n y í t á s. Először megmutatjuk, hogy létezik olyan $M \in \mathbb{R}$ pozitív konstans, melyre $\rho(a) \leq M\|a\|$ teljesül minden $a \in \mathcal{A}^+$ esetén. Tegyük fel indirekt, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re van olyan $a_n \in \mathcal{A}^+$, $\|a_n\| = 1$ elem, melyre $\rho(a_n) \geq 2^n$. Legyen $a = \sum_n 2^{-n}a_n$. A ρ monotonitása miatt kapjuk, hogy

$$\rho(a) \geq \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\rho(a_k) \geq n$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ez azonban nyilvánvaló ellentmondás.

Legyen most $x \in \mathcal{A}$ tetszőleges és legyen

$$h = \frac{x + x^*}{2}, \quad k = \frac{x - x^*}{2i}.$$

Ekkor a 2.4.3. Lemma jelöléseivel kapjuk, hogy

$$|\rho(x)| = |\rho(h^+ - h^-) + i\rho(k^+ - k^-)| \leq |\rho(h^+ - h^-)| + |\rho(k^+ - k^-)| \leq$$

$$\rho(h^+) + \rho(h^-) + \rho(k^+) + \rho(k^-) \leq M(\|h^+\| + \|h^-\| + \|k^+\| + \|k^-\|) \leq$$

$$M(\|h\| + \|h\| + \|k\| + \|k\|) \leq M(2\|x\| + 2\|x\|) = 4M\|x\|.$$

Ezzel a bizonyítás teljes.

2.6.3. Példa. Ha X kompakt Hausdorff-tér, akkor a Riesz-féle reprezentációs tétel (2.5.8. Tétel) miatt kapjuk, hogy $C(X)$ pozitív lineáris funkcionáljai éppen a pozitív reguláris Borel-mértékekhez tartozó funkcionálok.

Az $M_n(\mathbb{C})$ matrixalgebra lineáris funkcionáljai éppen az

$$A \longmapsto \operatorname{tr}(AT)$$

alakú leképezések, ahol $T \in M_n(\mathbb{C})$. Nem nehéz látni, hogy egy ilyen funkcionál pontosan akkor pozitív, ha T pozitív eleme az $M_n(\mathbb{C})$ C^*-algebrának, azaz T pozitív szemidefinit matrix.

2.6.4. Definíció. Az $\mathcal{A}$ 1-normájú pozitív lineáris funkcionáljait $\mathcal{A}$ állapotainak nevezzük, s ezek halmazát $S(\mathcal{A})$-val jelöljük.

2.6.5. Példa. Ha $\mathcal{A}$ egy, az I-t tartalmazó C^*-részalgebrája $B(H)$-nak, akkor az

$$A \longmapsto \langle A\xi, \xi \rangle$$

leképezés pozitív lineáris funkcionálja $\mathcal{A}$-nak, ami pontosan akkor állapot, ha $\|\xi\| = 1$. Ez utóbbi esetben a fenti funkcionált vektorállapotnak nevezzük.

2.6.6. Tétel. *Legyen $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ pozitív lineáris funkcionál. Ekkor*

$$|\rho(a^*b)|^2 \leq \rho(a^*a)\rho(b^*b)$$

teljesül minden $a, b \in \mathcal{A}$ esetén.

B i z o n y í t á s. Hasonlóan járunk el, mint a belszorzatra vonatkozó Schwarz-egyenlőtlenség bizonyításában. Tekintsük a

$$\rho((a+\lambda b)^*(a+\lambda b)) \geq 0$$

egyenlőtlenséget, ami fennáll minden $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén. Innen ρ önadjungáltságát felhasználva kapjuk, hogy

$$\rho(a^*a) + 2\mathrm{Re}\,(\lambda\rho(a^*b)) + |\lambda|^2\rho(b^*b) \geq 0. \tag{2.8}$$

Legyen most

$$\lambda = t\frac{\overline{\rho(a^*b)}}{|\rho(a^*b)|},$$

ahol $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a (2.8) bal oldalán álló kifejezés másodfokú polinom t-ben. Mivel ez mindenütt nagyobb vagy egyenlő mint 0, ezért diszkriminánsa nem lehet pozitív. Így

$$4|\rho(a^*b)|^2 - 4\rho(a^*a)\rho(b^*b) \leq 0,$$

ahonnan kapjuk az állítást.

2.6.7. Következmény. *Ha ρ pozitív lineáris funkcionál $\mathcal{A}$-n és $a \in \mathcal{A}$, akkor $\rho(a^*a) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\rho(ba) = 0$ minden $b \in \mathcal{A}$ esetén.*

2.6.8. Tétel. *Legyen f folytonos lineáris funkcionál $\mathcal{A}$-n. Az f pontosan akkor pozitív, ha $\|f\| = f(1)$.*

B i z o n y í t á s. Legyen f pozitív. Ekkor

$$|f(x)|^2 = |f(1^*x)|^2 \leq f(1)f(x^*x) \leq f(1)\|f\|\|x\|^2,$$

ahonnan kapjuk, hogy $\|f\| \leq f(1)$. Mivel $f(1) \leq \|f\|$ triviálisan teljesül, így adódik az állítás első része.

Legyen most f egy olyan korlátos lineáris funkcionál, melyre $\|f\| = f(1)$. Világos, hogy feltehetjük, hogy $f(1) = 1$. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $x \in \mathcal{A}$ normális elem esetén $f(x)$ eleme a $\sigma(x)$ konvex burkának, amiből már következik f pozitivitása. Legyen $x \in \mathcal{A}$ normális elem és tegyük fel, hogy a fenti állítás nem teljesül. Ekkor létezik olyan $\lambda \in \mathbb{C}$ szám és $s > 0$ sugár, hogy $\sigma(x)$ benne van az s sugarú, λ középpontú zárt körlapban, aminek $f(x)$ nem eleme. Ekkor $r(x-\lambda) \leq s$ és

$$s < |f(x) - \lambda| = |f(x - \lambda 1)| \leq \|x - \lambda\|.$$

Mivel azonban $x - \lambda 1$ normális elem, így spektrálsugara megegyezik normájával. Innen adódik, hogy $s < r(x-\lambda)$. Mivel ez ellentmondás, a bizonyítás így teljes.

2.6.9. Következmény. *Az $\mathcal{A}^*$ zárt egységgömbjének elemei közül az állapotok pontosan azon f funkcionálok, melyekre $f(1) = 1$.*

2.6.10. Következmény. *Legyen $\mathcal{B}$ egy, az egységelemet tartalmazó C^*-részalgebrája az $\mathcal{A}$ C^*-algebrának. Ekkor $\mathcal{B}$ minden állapota kiterjeszthető $\mathcal{A}$ állapotává.*

Bizonyítás. Legyen f állapota $\mathcal{B}$-nek. A Hahn-Banach-féle kiterjesztési tétel felhasználásával terjesszük ki f-et az $\mathcal{A}$ egy ρ korlátos lineáris funkcionáljává, melyre $\|\rho\| = 1$. Mivel $\rho(1) = f(1) = 1$, így a 2.6.9. Következmény miatt ρ állapota $\mathcal{A}$-nak.

2.6.11. Következmény. *Legyen $a \in \mathcal{A}^+$. Ekkor $\mathcal{A}$-nak létezik olyan ρ állapota, melyre $\rho(a) = \|a\|$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ az $1, a$ által generált kommutatív C^*-részalgebrája $\mathcal{A}$-nak. Mivel $\|a\|$ eleme $\sigma(a)$-nak, így létezik olyan φ karaktere $\mathcal{B}$-nek, melyre $\varphi(a) = \|a\|$. Továbbá, mivel φ állapota $\mathcal{B}$-nek, így a 2.6.10. Következményt alkalmazva, kapjuk az állítást.

2.6.12. Következmény. *Az $\mathcal{A}$ állapotainak $S(\mathcal{A})$ halmaza az $\mathcal{A}^*$ gyenge*-topológiájával egy kompakt konvex halmaz.*

Bizonyítás. Az állapotoknak a 2.6.9. Következményben adott karakterizációja miatt $S(\mathcal{A})$ konvex halmaz, ami (lévén hogy a gyenge*-topológia konvergenciája a pontonkénti konvergencia) zárt részhalmaza az $\mathcal{A}^*$ zárt egységgömbjének a gyenge*-topológiára nézve. Azonban az $\mathcal{A}^*$ zárt egységgömbje a Banach-Alaoglu-tétel miatt gyenge*-kompakt. Innen adódik $S(\mathcal{A})$ kompaktsága.

2.6.13. Definíció. Az $\mathcal{A}$ állapotai halmazának extremális pontjait tiszta állapotoknak nevezzük. A tiszta állapotok halmazát $P(\mathcal{A})$ jelöli.

2.6.14. Megjegyzés. A Krein-Milman-tétel – ami azt állítja, hogy lokálisan konvex topológikus vektortérben kompakt konvex halmaz megegyezik extremális pontjai konvex burkának lezártjával – következtében világos, hogy a tiszta állapotok halmaza konvex burkának gyenge*-lezártja éppen az állapotok halmaza.

A következőkben látni fogjuk, hogy az állapotok az alapul vett C^*-algebra topológikusan ciklikus *-reprezentációival, míg a tiszta állapotok a topológikusan irreducibilis *-reprezentációival állnak szoros kapcsolatban.

A 2.6.8. Tételnek igaz egyfajta általánosítása tetszőleges C^*-algebrába képező transzformációkra is.

2.6.15 . Tétel. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ C^*-algebrák és $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ lineáris leképezés. Ekkor a következő állítások igazak.*

(i) Ha $\phi(1) = \|\phi\|1$, akkor ϕ pozitív, azaz $\phi(x^*x) \geq 0$ minden $x \in \mathcal{A}$ esetén.

(ii) Ha ϕ pozitív kontrakció (azaz ϕ pozitív és $\|\phi\| \leq 1$), akkor $\phi(h)^2 \leq \phi(h^2)$ minden $h \in \mathcal{A}$ önadjungált elem esetén.

B i z o n y í t á s. Lásd [23, Trditev 7, 46. o.] és [13, 10.5.9 és 10.5.10].

2.7 *-reprezentációk

2.7.1 . Definíció. Legyen $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ *-reprezentáció. Azt mondjuk, hogy π

(i) nemdegenerált, ha tetszőleges $\xi \in H$ esetén a $\pi(\mathcal{A})\xi = \{0\}$ összefüggésből következik, hogy $\xi = 0$;

(ii) topológikusan ciklikus, ha létezik olyan $\xi \in H$ vektor, melyre a $\pi(\mathcal{A})\xi$ altér sűrű H-ban (ekkor a ξ vektort topológikusan ciklikus vektornak nevezzük);

(iii) topológikusan irreducibilis ha $\pi \neq 0$ és $\pi(\mathcal{A})$-nak nincs nemtriviális zárt invariáns altere.

A C^*-algebrák *-reprezentációival kapcsolatban a továbbiakban, ha másképp nem mondjuk, ciklikusságon mindig topológikus ciklikusságot, irreducibilitáson pedig mindig topológikus irreducibilitást értünk.

2.7.2 . Megjegyzés. A következőkben szükségünk lesz néhány egyszerű észrevételre. Először, ha $a \in \mathcal{A}^+$, akkor $a \leq \|a\|1$. Ez abból adódik, hogy $\|a\|1 - a$ önadjungált és spektruma $\|a\| - \sigma(a)$, ami teljes egészében a számegyenes nemnegatív felén helyezkedik el. Második észrevételünk az, hogy ha $a, b \in \mathcal{A}$ önadjungált elemek és $a \leq b$, akkor $x^*ax \leq x^*bx$ teljesül minden $x \in \mathcal{A}$ esetén. Ez abból adódik, hogy $b - a \geq 0$, s így a 2.4.8. Következmény miatt $b - a = y^*y$ teljesül valamely $y \in \mathcal{A}$ esetén. Innen kapjuk, hogy $x^*(b-a)x = (yx)^*(yx) \geq 0$.

2.7.3 . Tétel. *Legyen $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ *-reprezentáció. Ekkor a következő állítások igazak:*

(i) π pontosan akkor nemdegenerált, ha $\overline{\operatorname{span}}\{\pi(\mathcal{A})H\} = H$.

(ii) π pontosan akkor nemdegenerált, ha $\pi(1) = I$.

(iii) Ha π ciklikus, akkor π nemdegenerált.

(iv) Ha π irreducibilis, akkor π ciklikus.

(v) A π pontosan akkor irreducibilis, ha minden $0 \neq \xi \in H$ ciklikus vektora π-nek.

(vi) A $\pi \neq 0$ esetben π pontosan akkor irreducibilis, ha $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I$.

Itt $\overline{\operatorname{span}}$ a generált zárt alteret jelöli.

B i z o n y í t á s. Tekintsük először (i)-et. Legyen π nemdegenerált. Ha ξ ortogonális $\pi(\mathcal{A})H$-ra, akkor $\langle \xi, \pi(a)x \rangle = 0$ minden $a \in \mathcal{A}$ és $x \in H$ esetén. Ebből $\langle \pi(a^*)\xi, x \rangle = 0$ $(a \in \mathcal{A}, x \in H)$, s így $\pi(\mathcal{A})\xi = \{0\}$. Ezért $\xi = 0$, ahonnan kapjuk, hogy $\overline{\operatorname{span}}\{\pi(\mathcal{A})H\} = H$. Megfordítva, ha $\overline{\operatorname{span}}\{\pi(\mathcal{A})H\} = H$ és $\pi(\mathcal{A})\xi = \{0\}$, akkor $\langle \pi(a)\xi, x \rangle = 0$ $(a \in \mathcal{A}, x \in H)$. Innen $\langle \xi, \pi(a^*)x \rangle = 0$ minden $a \in \mathcal{A}$ és $x \in H$ esetén. Ebből $\xi \perp \pi(\mathcal{A})H$ adódik, ahonnan a feltételünk miatt $\xi = 0$ következik.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges π *-reprezentáció esetén $\pi(1)$ megegyezik a $\overline{\operatorname{span}}\{\pi(\mathcal{A})H\}$ altérre történő ortogonális projekcióval. Mivel $\pi(1)$ nyilvanvalóan projekció, így azt kell megmutatnunk, hogy $\pi(1)$ értékkészlete éppen a fenti altér. Az világos, hogy $\pi(1)$ értékkészlete része $\overline{\operatorname{span}}\{\pi(\mathcal{A})H\}$-nak és ezen altér minden elemét $\pi(1)$ fixen hagyja. Innen adódik az állításunk és kapjuk a (ii)-ben szereplő ekvivalenciát.

A (iii)-hoz vegyünk egy tetszőleges $\xi \in H$ ciklikus vektort. Ekkor már $H = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(\mathcal{A})\xi\}$ is teljesül, tehát $\overline{\operatorname{span}}\{\pi(\mathcal{A})H\} = H$ triviálisan adódik.

Ha most π irreducibilis és $\xi \in H$ olyan vektor, melyre $\pi(\mathcal{A})\xi \neq \{0\}$, akkor, mivel $\overline{\pi(\mathcal{A})\xi}$ zárt invariáns altér, kapjuk, hogy $\overline{\pi(\mathcal{A})\xi} = H$. Ezért π ciklikus *-reprezentáció. Innen kapjuk a (iv) állítást.

Legyen π irreducibilis, akkor π nemdegenerált. Ezért tetszőleges $0 \neq \xi \in H$ esetén $\pi(\mathcal{A})\xi \neq \{0\}$ innen a bizonyítás előző része miatt az következik, hogy ξ ciklikus vektora π-nek. Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $0 \neq \xi \in H$ ciklikus vektora π-nek. Ha $\{0\} \neq M \subset H$ zárt invariáns altér, akkor véve egy tetszőleges $0 \neq \xi \in M$ vektort, adódik, hogy $H = \overline{\pi(\mathcal{A})\xi} \subset M$. Ezért $M = H$, tehát π irreducibilis reprezentáció. Innen kapjuk az állítás (v) részét.

Tekintsük végül (vi)-ot. Tegyük fel, hogy π irreducibilis. Legyen $A \in B(H)$ önadjungált operátor, melyre $A\pi(a) = \pi(a)A$ teljesül minden $a \in \mathcal{A}$ estén. Ekkor a spektráltétel miatt minden $\pi(a)$ felcserélhető az A-hoz tartozó spektrálmérték értékkészletével. Ebből következik, hogy a a szóbanforgó spektrálmérték értékkészletében szereplő projekciók értékkészletei invariáns alterei a $\pi(a)$-knak és így kapjuk, hogy az A-hoz tartozó spektrálmérték értékkészlete $\{0, I\}$. Innen következik, hogy A az identitás skalárszorosa. Ha most A tetszőleges eleme $\pi(\mathcal{A})'$-nek, akkor az $(A + A^*)/2$ és $(A - A^*)/(2i)$ önadjungált operátorok is elemei $\pi(\mathcal{A})'$-nek. A fentiekből következik, hogy $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I$. Megfordítva,

ha $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I$ teljesül és $M \subset H$ zárt invariáns altere π-nek, akkor az M-re történő P ortogonális projekcióra $P\pi(a)P = \pi(a)P$. Ezen egyenlőség mindkét oldalának adjungáltját véve könnyen belátható, hogy $\pi(a)P = P\pi(a)$ teljesül minden $a \in \mathcal{A}$ esetén. Innen $P = 0$ vagy $P = I$ adódik. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy π irreducibilis.

A bizonyítás ezzel teljes.

2.7.4. Megjegyzés. Tekintsünk egy $0 \neq \pi : \mathcal{A} \to B(H)$ *-reprezentációt. Ekkor $\pi(1) \in B(H)$ projekció. Jelölje ennek magját H_0, képterét pedig H_1. Könnyű látni, hogy H_0, H_1 invariáns alterei $\pi(\mathcal{A})$-nak, $x \mapsto \pi(x)_{|H_0}$ a zérus reprezentáció és $x \mapsto \pi(x)_{|H_1}$ nemdegenerált *-reprezentáció. Ez mutatja, hogy elegendő csak nemdegenerált reprezentációkkal foglalkozni.

2.7.5. Definíció. Legyen $\pi_\alpha : \mathcal{A} \to B(H_\alpha)$ az $\mathcal{A}$ *-reprezentációja a H_α Hilbert-téren ($\alpha \in \Gamma$). Legyen $H = \sum_{\alpha\in\Gamma} \oplus H_\alpha$. A

$$\pi(a)((\xi_\alpha)) = (\pi_\alpha(a)\xi_\alpha) \qquad (a \in \mathcal{A}, (\xi_\alpha) \in H)$$

módon definiált *-reprezentációt a π_α ($\alpha \in \Gamma$) *-reprezentációk direkt összegének nevezzük és $\pi = \sum_{\alpha\in\Gamma} \oplus \pi_\alpha$-val jelöljük.

2.7.6. Tétel. *Legyen $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ nemdegenerált *-reprezentáció. Ekkor π előáll ciklikus *-reprezentációk direkt összegeként.*

Bizonyítás. Tetszőleges $0 \neq \xi \in H$ esetén jelölje H_ξ a $\pi(\mathcal{A})\xi$ altér lezártját. Vegyük ezen H_ξ alterek páronként ortogonális rendszereinek halmazát a tartalmazási relációval. Erre teljesül a Zorn-lemma feltétele (minden lánc benne felülről korlátos), ezért van maximális ilyen rendszer. Jelölje ezt $\{H_{\xi_\alpha}\}_\alpha$, és legyen H_0 a $\{H_{\xi_\alpha}\}_\alpha$ által generált zárt altér. Ha ennek ortogonális komplementere nem lenne triviális, akkor abból kivéve egy $\xi \neq 0$ vektort és tekintve a H_ξ alteret, azt kapnánk, hogy $H_{\xi_\alpha} \perp H_\xi$ teljesül minden α index esetén. Mivel ez ellentmond a $\{H_{\xi_\alpha}\}_\alpha$ maximalitásának, kapjuk, hogy $H_0 = H$. Tekintsük most a $\pi_\alpha(a) = \pi(a)_{|H_{\xi_\alpha}}$ ($a \in \mathcal{A}$) módon definiált $\pi_\alpha : \mathcal{A} \to B(H_{\xi_\alpha})$ leképezéseket. Könnyű belátni, hogy ezek *-reprezentációk. Továbbá $\pi(1) = I$ miatt $\xi = \pi(1)\xi \in H_\xi$. Innen kapjuk, hogy minden π_α ciklikus *-reprezentáció H_α-n és $\pi = \sum_\alpha \oplus \pi_\alpha$.

2.7.7. Megjegyzés. Természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy vajon nem lehet-e a ciklikus reprezentációkat továbbbontani irreducibilis reprezentációk valamilyen értelemben vett összegére? A kérdésre pozitív válasz adható, bár ehhez nem elég reprezentációknak a direktösszegét, hanem úgynevezett direktintegrálját kell tekinteni.

2.7.8. Tétel. (Gelfand-Naimark-Segal-konstrukció) *Legyen $\rho \in S(\mathcal{A})$. Ekkor létezik olyan H_ρ Hilbert-tér, $\xi_\rho \in H_\rho$ egységvektor és $\pi_\rho : \mathcal{A} \to B(H_\rho)$ *-reprezentáció, melyre*

(i) $\rho(x) = \langle \pi_\rho(x)\xi_\rho, \xi_\rho \rangle$ *minden $x \in \mathcal{A}$ esetén;*

(ii) $\pi_\rho(\mathcal{A})\xi_\rho$ *sűrű H_ρ-ban.*

Bizonyítás. Tetszőleges $x, y \in \mathcal{A}$ esetén legyen

$$\langle x, y \rangle = \rho(y^* x).$$

Világos, hogy $\langle ., . \rangle$ szemi-belsőszorzat. Ha

$$N_\rho = \{x \in \mathcal{A} : \langle x, x \rangle = 0\} = \{x \in \mathcal{A} : \rho(x^* x) = 0\},$$

akkor N_ρ altere $\mathcal{A}$-nak, sőt, a 2.6.7. Következmény miatt balideál. Az $\mathcal{A}/N_\rho$ faktortéren ekkor természetes módon definiálható egy belsőszorzat a reprezentánsok szemi-belsőszorzata révén. Végül tegyük az $\mathcal{A}/N_\rho$ belsőszorzatteret teljessé, jelölje ezt H_ρ, ami Hilbert-tér. Tetszőleges $a \in \mathcal{A}$ esetén legyen

$$\pi_\rho(a)\overline{x} = \overline{ax} \qquad (x \in \mathcal{A}),$$

ahol $^-$ jelöli az N_ρ szerinti mellékosztályokat. Mivel N_ρ balideál, ezért $\pi_\rho(a)$ jóldefiniált lineáris operátor $\mathcal{A}/N_\rho$-n. A 2.7.2. Megjegyzés felhasználásával kapjuk, hogy

$$\|\overline{ax}\|^2 = \rho((ax)^*(ax)) = \rho(x^*(a^*a)x) \leq \rho(x^*\|a\|^2 x) = \|a\|^2 \rho(x^* x) = \|a\|^2 \|\overline{x}\|^2$$

teljesül minden $x \in \mathcal{A}$ esetén, tehát $\pi_\rho(a)$ korlátos lineáris operátor $\mathcal{A}/N_\rho$-n. Ekkor $\pi_\rho(a)$ kiterjeszthető – méghozzá egyértelmű módon – a H_ρ korlátos lineáris operátorává. Jelölje ezt a kiterjesztést is $\pi_\rho(a)$. Könnyű látni, hogy π_ρ *-reprezentáció. Valóban, a linearitás és a multiplikativitás nyilvánvalóan fennáll $\mathcal{A}/N_\rho$-n, s így a folytonosság miatt H_ρ-n is. Mivel

$$\langle \pi_\rho(a)\overline{x}, \overline{y} \rangle = \langle \overline{ax}, \overline{y} \rangle = \langle ax, y \rangle =$$
$$\rho(y^*(ax)) = \rho((a^*y)^* x) = \langle x, a^* y \rangle = \langle \overline{x}, \overline{a^* y} \rangle = \langle \overline{x}, \pi_\rho(a^*)\overline{y} \rangle$$

teljesül minden $x, y \in \mathcal{A}$ esetén, így a szereplő operátorok folytonossága és $\mathcal{A}/N_\rho$-nak H_ρ-ban való sűrűsége miatt kapjuk, hogy $\pi_\rho(a)^* = \pi_\rho(a^*)$ minden $a \in \mathcal{A}$ esetén. Tehát π_ρ valóban *-reprezentáció. Legyen $\xi_\rho = \overline{1}$. Ekkor $\|\overline{1}\|^2 = \rho(1^* 1) = \rho(1) = 1$ és

$$\langle \pi_\rho(a)\xi_\rho, \xi_\rho \rangle = \langle \overline{a1}, \overline{1} \rangle = \rho(1^*(a1)) = \rho(a) \quad (a \in \mathcal{A}).$$

Továbbá

$$\pi_\rho(\mathcal{A})\xi_\rho = \{\overline{a} : a \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}/N_\rho,$$

ami sűrű H_ρ-ban.

A bizonyítás ezzel teljes.

2.7.9. Tétel. (Gelfand-Naimark) *Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra. Ekkor létezik olyan H Hilbert-tér, hogy $\mathcal{A}$ izometrikusan *-izomorf a $B(H)$ egy, az identikus operátort tartalmazó C^*-részalgebrájával.*

Bizonyítás. Állapotoknak egy $\mathcal{F}$ összességét hűnek nevezzük, ha tetszőleges $0 \neq a \in \mathcal{A}^+$ esetén létezik olyan $\rho \in \mathcal{F}$, hogy $\rho(a) \neq 0$. A 2.6.11. Következmény azt mutatja, hogy a teljes $S(\mathcal{A})$ halmaz hű. Tetszőleges $\rho \in \mathcal{F}$ esetén tekintsük a Gelfand-Naimark-Segal-konstrukcióból adódó H_ρ Hilbert-teret és π_ρ *-reprezentációt. Legyen $H = \sum_{\rho\in\mathcal{F}} \oplus H_\rho$ és $\pi = \sum_{\rho\in\mathcal{F}} \oplus \pi_\rho$. Világos, hogy π *-reprezentációja $\mathcal{A}$-nak H-n. Ha $x \neq 0$, akkor létezik olyan $\rho \in \mathcal{F}$, melyre $\rho(x^*x) \neq 0$. Ekkor a 2.7.8. Tétel bizonyításának jelöléseivel

$$\|\pi_\rho(x)\xi_\rho\|^2 = \|\pi_\rho(x)\overline{1}\|^2 = \|\overline{x}\|^2 = \rho(x^*x) \neq 0.$$

Tehát $\pi_\rho(x) \neq 0$, amiből $\pi(x) \neq 0$ következik. Ezért π injektív. A 2.5.7. Tétel miatt kapjuk, hogy π izometrikus *-izomorfizmusa $\mathcal{A}$-nak a $B(H)$ egy C^*-részalgebrájára. Végezetül, mivel $\pi_\rho(1)\overline{x} = \overline{1x} = \overline{x}$, így $\pi(1) = I$.

A bizonyítás ezzel teljes.

2.7.10. Definíció. Ha a Gelfand-Naimark-tétel bizonyításában szereplő $\mathcal{F}$ halmaz az állapotok teljes $S(\mathcal{A})$ halmaza, akkor az így adódó *-reprezentációt univerzális reprezentációnak nevezzük.

2.7.11. Tétel. *Legyen ρ lineáris funkcionál $\mathcal{A}$-n. A ρ pontosan akkor állapota $\mathcal{A}$-nak, ha létezik olyan $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ ciklikus *-reprezentáció és $\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$ ciklikus vektor, melyre*

$$\rho(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \qquad (a \in \mathcal{A}).$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy ρ előáll a fenti alakban. A 2.6.9. Következmény miatt azt kell megmutatnunk, hogy $\|\rho\| \leq 1$ és $\rho(1) = 1$. Az első egyenlőtlenség a 2.5.7. Tétel, a második pedig a 2.7.3. Tétel következménye. A szükségesség a Gelfand-Naimark-Segal-konstrukcióból (2.7.8. Tétel) adódik.

2.7.12. Tétel. *Legyen ρ lineáris funkcionál $\mathcal{A}$-n. Ekkor ρ pontosan akkor tiszta állapota $\mathcal{A}$-nak, ha létezik olyan $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ irreducibilis *-reprezentáció $\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$ ciklikus vektorral, melyre*

$$\rho(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \qquad (a \in \mathcal{A}).$$

Bizonyítás. Megtalálható például [15], 5.1 Szakaszában.

A következő fontos eredmény előtt emlékeztetünk arra, hogy C^*-algebrák esetén *-reprezentáció irreducibilitásán annak topológikus irreducibilitását értjük.

2.7.13. Tétel. (Kadison-féle tranzitivitási tétel) *Legyen $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ (topológikusan) irreducibilis *-reprezentáció. Ekkor tetszőleges $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H$ független vektorrendszer és $\eta_1, \ldots, \eta_n \in H$ esetén létezik olyan $a \in \mathcal{A}$, melyre $\pi(a)\xi_1 = \eta_1, \ldots, \pi(a)\xi_n = \eta_n$.*

Bizonyítás. Lásd [15], 5.2 Szakaszát. A bizonyítás alapeszköze az ún. Kaplansky-féle sűrűségi tétel, amivel majd a 3. Fejezetben fogunk megismerkedni.

A Kadison-féle tranzitivitási tétel egyszerű következménye az alábbi meglepő eredmény.

2.7.14. Következmény. *Tetszőleges C^*-algebra nemzérus *-reprezentációja pontosan akkor topológikusan irreducibilis, ha algebrailag irreducibilis.*

A továbbiakban szükségünk lesz az alábbi jelölésre. Legyen H Hilbert-tér. Tetszőleges $x, y \in H$ esetén jelölje $x \otimes y$ az $(x \otimes y)z = \langle z, y \rangle x$ $(z \in H)$ összefüggéssel definiált operátort. Könnyű látni, hogy $\|x \otimes y\| = \|x\|\|y\|$. Az is világos, hogy $x, y \neq 0$ esetén $x \otimes y$ rangja 1, továbbá, hogy minden 1-rangú korlátos lineáris operátor H-n felírható $x \otimes y$ alakban. Jelölje $F(H)$ a $B(H)$ véges rangú elemeinek összességét. Egyszerűen belátható, hogy $F(H)$ ideál és hogy $F(H)$ éppen az $x \otimes y$ típusú operátorok által generált altere $B(H)$-nak.

Könnyű megmutatni, hogy

$$(x \otimes y)^* = y \otimes x, \quad x \otimes y \cdot u \otimes v = \langle u, y \rangle x \otimes v,$$

$$S \cdot x \otimes y = (Sx) \otimes y, \quad x \otimes y \cdot S = x \otimes (S^* y)$$

teljesül tetszőleges $x, y, u, v \in H$ és $S \in B(H)$ esetén.

2.7.15. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra és $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ irreducibilis *-reprezentáció. Ha $\pi(\mathcal{A}) \cap C(H) \neq \{0\}$, akkor $C(H) \subset \pi(\mathcal{A})$.*

Bizonyítás. Amint majd látni fogjuk a 2.8.4. Tételben, C^*-algebra *-homomorf képe is C^*-algebra, így azt kell megmutatnunk, hogy ha $\mathcal{B} \subset B(H)$ egy, az identikus operátort tartalmazó irreducibilis C^*-részalgebra, amiben található nemzérus kompakt operátor, akkor $C(H) \subset \mathcal{B}$. Legyen tehát A egy nemzérus kompakt operátor $\mathcal{B}$-ben. Ekkor $B = A^*A \in C(H) \cap \mathcal{B}$. Mivel B spektruma nemnegatív, és elemei csak a 0-hoz torlódhatnak, így a spektrum tetszőleges zérustól különböző pontjához tartozó karakterisztikus függvény folytonos, és így a Stone-Weierstrass-tétel miatt polinomokkal egyenletesen approximálható $\sigma(B)$-n. Innen kapjuk, hogy $\mathcal{B}$ tartalmaz 0-tól különböző

végesrangú projekciót. Legyen P minimális rangú ilyen projekció. Tekintsük a $P\mathcal{B}P$ C^*-részalgebra egy tetszőleges önadjungált elemét. Világos, hogy ez véges rangú operátor, és a nemzérus sajátértékeihez tartozó spektrálprojekciók mind kisebb vagy egyenlők P-nél. Az előzőekben alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan kapjuk, hogy minden ilyen spektrálprojekció a szóbanforgó elem polinomjaival egyenletesen approxmálható (sőt megegyezik ezen elem valamelyik polinomjával). Innen következik, hogy minden szóbanforgó spektrálprojekció eleme $\mathcal{B}$-nek, tehát P minimális rangú volta miatt egyenlő P-vel. Ezért $P\mathcal{B}P = \mathbb{C}P$. Belátjuk, hogy P rangja 1. Legyen ugyanis $x_0 \in \operatorname{rng} P$ egységvektor. Ha $y \in \operatorname{rng} P$ merőleges x_0-ra, akkor

$$\langle Ax_0, y\rangle = \langle APx_0, Py\rangle = \langle PAPx_0, y\rangle = \langle \lambda Px_0, y\rangle = 0$$

teljesül minden $A \in \mathcal{B}$ esetén, ugyanis $P\mathcal{B}P = \mathbb{C}P$. Mivel $\overline{\mathcal{B}x_0}$ zárt invariáns altere $\mathcal{B}$-nek, így $x_0 \neq 0$ miatt $\overline{\mathcal{B}x_0} = H$. Ebből $y = 0$ következik, ahonnan kapjuk, hogy P rangja 1. Állításunk belátásához most már csak azt kell megmutatni, hogy minden egyrangú projekció H-n eleme $\mathcal{B}$-nek. Legyen $x \in H$ tetszőleges egységvektor és tekintsük a $Q = x \otimes x$ projekciót. Mivel $\overline{\mathcal{B}x_0} = H$, így létezik olyan $A_n \in \mathcal{B}$ sorozat, hogy $A_n x_0 \to x$. Ekkor $A_n P A_n^* = A_n x_0 \otimes A_n x_0 \to x \otimes x$. Ezért $x \otimes x \in \mathcal{B}$, azaz $\mathcal{B}$ tartalmazza az összes egyrangú projekciót H-n. Innen következik, hogy $\mathcal{B}$ tartalmazza az összes véges rangú projekciót, s a $\mathcal{B}$ zártsága és a kompakt önadjungált operátorok spektráltétele miatt az összes kompakt operátort is.

2.7.16. Definíció. Legyenek $\pi_1 : \mathcal{A} \to B(H_1)$ és $\pi_2 : \mathcal{A} \to B(H_2)$ *-reprezentációk. Azt mondjuk, hogy π_1 és π_2 unitér-ekvivalensek, ha létezik olyan $U : H_2 \to H_1$ unitér operátor, melyre

$$\pi_1(a) = U\pi_2(a)U^* \qquad (a \in \mathcal{A}).$$

Bár a tárgyalás egyszerűsége érdekében mindvégig egységelemes C^*-algebrákkal foglalkoztunk, megjegyezzük, hogy például *-reprezentációk esetén a nemdegeneráltság, ciklikusság, illetve irreducibilitás fogalma nem kívánja meg az alapul vett C^*-algebra egységelemességét. Az alábbiakban néhány fontos eredményt ismertetünk a kompakt operátorok $C(H)$-val jelölt C^*-algebrájával és a $B(H)$ reprezentációelméletével kapcsolatban.

2.7.17. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér. A $C(H)$ C^*-algebrának unitér-ekvivalencia erejéig pontosan egy irreducibilis *-reprezentációja van, nevezetesen az identikus reprezentáció $C(H)$-n. Másképpen fogalmazva, a $C(H)$ tetszőleges irreducibilis *-reprezentációja a K Hilbert-téren $A \mapsto UAU^*$ alakú, ahol $U : H \to K$ unitér operátor.*

Bizonyítás. Lásd [13, 10.4.6. Theorem].

2.7.18. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér. Ha $\mathcal{A}$ egy C^*-részalgebrája $C(H)$-nak, akkor léteznek olyan H_α $(\alpha \in \Gamma)$ Hilbert-terek, hogy $\mathcal{A}$ izometrikusan *-izomorf a*

$$\sum_{\alpha\in\Gamma} \oplus C(H_\alpha) = \{(A_\alpha)_\alpha \,:\, A_\alpha \in C(H_\alpha) \text{ és } \forall\epsilon > 0 : \exists F \subset \Gamma \text{ véges halmaz} : \|A_\alpha\| < \epsilon\, (\alpha \notin F)\}$$

C^*-algebrával, ahol a műveletek koordinátánként értendők, a norma pedig a koordináták normáinak szuprémuma.

B i z o n y í t á s. Lásd [1], 1.4 szakasz.

2.7.19. Tétel. *Legyen H végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér és π irreducibilis *-reprezentációja $B(H)$-nak. Ekkor vagy $\pi(C(H)) = \{0\}$, vagy pedig π unitér ekvivalens az identikus reprezentációval $B(H)$-n.*

B i z o n y í t á s. Lásd [13, 10.4.6. Theorem].

2.7.20. Tétel. *Legyen H végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér és π tetszőleges *-reprezentációja $B(H)$-nak. Ekkor létezik olyan π_1, π_2 *-reprezentáció, melyre π unitér-ekvivalens $\pi_1 \oplus \pi_2$-vel és π_1 (zérus vagy) felírható $\pi_1 = \sum_\alpha \oplus id_{B(H)}$ alakban (azaz π_1 a $B(H)$ identikus reprezentációjának elegendően nagy direkt összege önmagával) és π_2 (zérus vagy) olyan *-reprezentáció, ami eltűnik $C(H)$-n.*

B i z o n y í t á s. Lásd [13, 10.4.7. Theorem].

A következő tétel azt mutatja, hogy szeparábilis H esetén a $B(H)$ C^*-algebra szeparábilis téren történő *-reprezentációinak nincs "szinguláris" része, azaz a 2.7.20. Tételben szereplő π_2 tényező zérus.

2.7.21. Tétel. *Legyen H végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér és $\pi : B(H) \to B(H)$ *-homomorfizmus. Ekkor léteznek olyan U_n páronként ortogonális értékkészletű izometriák, melyekre*

$$\pi(A) = \sum_n U_n A U_n^* \qquad (A \in B(H)).$$

B i z o n y í t á s. Lásd [13, 10.4.14. Corollary].

2.7.22. Tétel. *Legyen H végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér. Ekkor $B(H)$-nak unitér-ekvivalencia erejéig pontosan 2^c különböző irreducibilis *-reprezentációja van.*

B i z o n y í t á s. Lásd [13, 10.4.15. Proposition].

2.8 C^*-algebrák ideáljai

2.8.1. Lemma. *Legyen $a, b \in \mathcal{A}^+$ olyan, hogy $a \leq b$. Ekkor $\|a\| \leq \|b\|$.*

Bizonyítás. Legyen ρ olyan állapot, melyre $\rho(a) = \|a\|$ (lásd a 2.6.11. Következményt). Ekkor $b - a \geq 0$ miatt kapjuk, hogy

$$\|a\| = \rho(a) \leq \rho(b) \leq \|b\|.$$

2.8.2. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra, $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ pedig egy ideál. Jelölje Λ az $\mathcal{I}$ véges részhalmazainak halmazát a tartalmazással mint irányítási relációval. Ekkor létezik olyan $(u_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ nett $\overline{\mathcal{I}}$-ban, melyre*

(i) $u_\alpha \in \mathcal{A}^+$, $\|u_\alpha\| \leq 1$ $(\alpha \in \Lambda)$;

(ii) $\lim_\alpha au_\alpha = a$ *minden* $a \in \mathcal{I}$ *esetén.*

Bizonyítás. Ha $\alpha = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \Lambda$, akkor legyen

$$v_\alpha = x_1^* x_1 + \ldots + x_n^* x_n, \quad u_\alpha = v_\alpha \left(v_\alpha + \frac{1}{n} 1 \right)^{-1}.$$

Mivel a $t \mapsto t(t + 1/n)^{-1}$ függvény 0 és 1 közötti értékeket vesz fel v_α spektrumán, így $\sigma(u_\alpha) \subset [0, 1]$, ahonnan kapjuk, hogy u_α pozitív és normája kisebb vagy egyenlő mint 1. Mivel $v_\alpha \in \mathcal{I}$ és u_α folytonos függvénye v_α-nak, így u_α egyenletesen approximálható v_α polinomjaival. Innen kapjuk, hogy $u_\alpha \in \overline{\mathcal{I}}$. A folytonos függvénykalkulus felhasználásával adódik, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k(u_\alpha - 1))^*(x_k(u_\alpha - 1)) = (u_\alpha - 1)v_\alpha(u_\alpha - 1) = \frac{1}{n^2} v_\alpha(v_\alpha + 1/n)^{-2}.$$

Mivel

$$\frac{t}{(t + 1/n)^2} \leq \frac{1}{t + 1/n} \leq n \qquad (t \geq 0),$$

így kapjuk, hogy

$$\sigma(\sum_{k=1}^{n} (x_k(u_\alpha - 1))^*(x_k(u_\alpha - 1))) \subset [0, 1/n],$$

ahonnan a 2.8.1. Lemma figyelembevételével adódik, hogy

$$\|x_k(u_\alpha - 1)\|^2 \leq \| \sum_{k=1}^{n} (x_k(u_\alpha - 1))^*(x_k(u_\alpha - 1))\| \leq 1/n.$$

Tehát ha $x \in \mathcal{I}$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor tetszőleges $\alpha \subset \mathcal{I}$ legalább n elemű, x-et tartalmazó véges halmazra kapjuk, hogy $\|x - xu_\alpha\|^2 \leq 1/n$. Ebből már adódik az állítás.

2.8.3. Tétel. *Legyen $\mathcal{I}$ zárt ideálja az $\mathcal{A}$ C^*-algebrának. Ekkor $\mathcal{I}$ önadjungált és az $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ faktoralgebra is C^*-algebra.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathcal{I}$. Ekkor a 2.8.2. Tétel jelöléseivel

$$\|(u_\alpha - 1)x^*\| = \|x(u_\alpha - 1)\| \to 0,$$

azaz $u_\alpha x^* \to x^*$. Mivel $u_\alpha \in \mathcal{I}$ $(\alpha \in \Lambda)$, így $x^* \in \mathcal{I}$. Tehát $\mathcal{I}$ önadjungált.

Mivel Banach-algebra zárt ideálra vonatkozó faktoralgebrája ugyancsak Banach-algebra, így csak azt kell belátnunk, hogy $\|\overline{x}\|^2 \leq \|\overline{x^*x}\|$ $(x \in \mathcal{A})$. Először megmutatjuk, hogy $\|\overline{x}\| = \lim_\alpha \|x - xu_\alpha\|$. Tudjuk, hogy ha $y \in \mathcal{I}$, akkor $\lim_\alpha yu_\alpha = y$. Ezért

$$\limsup_\alpha \|x - xu_\alpha\| = \limsup_\alpha \|x - xu_\alpha + y - yu_\alpha\| = \limsup_\alpha \|(x+y)(1-u_\alpha)\| \leq \|x+y\|$$

mivel $0 \leq 1 - u_\alpha \leq 1$. Következésképpen

$$\|\overline{x}\| \geq \limsup_\alpha \|x - xu_\alpha\| \geq \liminf_\alpha \|x - xu_\alpha\| \geq \inf_{y \in \mathcal{I}} \|x + y\| = \|\overline{x}\|.$$

Így kapjuk, hogy $\|\overline{x}\| = \lim_\alpha \|x - xu_\alpha\|$. Ha most $z \in \mathcal{I}$, akkor könnyen látszik, hogy $\lim_\alpha \|(1-u_\alpha)z(1-u_\alpha)\| = 0$. Ezért

$$\|\overline{x}\|^2 = \lim_\alpha \|x - xu_\alpha\|^2 =$$

$$\lim_\alpha \|(x - xu_\alpha)^*(x - xu_\alpha)\| = \lim_\alpha \|(1-u_\alpha)^* x^* x (1-u_\alpha)\| =$$

$$\lim_\alpha \|(1-u_\alpha)(x^*x + z)(1-u_\alpha)\| \leq \|x^*x + z\|.$$

Innen $z \in \mathcal{I}$ tetszőleges volta miatt kapjuk, hogy $\|\overline{x}\|^2 \leq \|\overline{x^*x}\|$.

2.8.4. Tétel. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ C^*-algebrák. Ha $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *-homomorfizmus, akkor $\phi(\mathcal{A})$ egy C^*-algebra.*

Bizonyítás. Mivel ϕ folytonos (2.5.7. Tétel), így magja zárt ideál. Tekintve a $\mathcal{A}/\ker\phi$ C^*-algebrát, feltehető, hogy az állításban szereplő ϕ leképezés injektív. A 2.5.7. Tétel miatt ekkor ϕ izometria. Az állítás ebből már nyilvánvalóan következik.

2.8.5. Következmény. *Legyen $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ zárt ideál és $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ az 1-et tartalmazó C^*-részalgebra. Ekkor $\mathcal{I} + \mathcal{B}$ is egy, az 1-et tartalmazó C^*-részalgebra.*

Bizonyítás. Csak a zártságot kell belátni. Tekintsük az $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ természetes leképezés megszorítását $\mathcal{B}$-re. Ennek értékkészlete, $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ a 2.8.4. Tétel miatt zárt $\mathcal{A}/\mathcal{I}$-ben. Így a természetes leképezés folytonossága miatt kapjuk, hogy ennek inverzképe, $\mathcal{I} + \mathcal{B}$ is zárt $\mathcal{A}$-ban.

Az alábbiakban röviden foglalkozunk a $B(H)$ operátoralgebra ideáljaival.

2.8.6. Tétel. *Legyen H egy Hilbert-tér. Ekkor $B(H)$ minden ideálja (nemcsak a zártak) zárt az adjungálás műveletére nézve. Ha $\{0\} \neq \mathcal{I} \subset B(H)$ tetszőleges ideál, akkor $F(H) \subset \mathcal{I}$.*

Bizonyítás. Az állítás első része a poláris felbontás következménye. Valóban, ha $T \in \mathcal{I}$ és $T = U|T|$ a T poláris felbontása, akkor $U^*T = |T|$ miatt $|T| \in \mathcal{I}$. Innen $T^* = |T|U^*$ miatt kapjuk az $\mathcal{I}$ önadjungáltságát.

A tétel második részéhez legyen $0 \neq T \in \mathcal{I}$. Legyen $u, y \in H$ olyan, hogy $\langle Tu, y\rangle \neq 0$. Mivel

$$\langle Tu, y\rangle x \otimes v = x \otimes y \cdot T \cdot u \otimes v \in \mathcal{I}$$

teljesül minden $x, v \in H$ esetén, ezért $\mathcal{I}$ tartalmazza a $B(H)$ összes egyrangú elemét. Innen adódik, hogy $F(H) \subset \mathcal{I}$.

2.8.7. Tétel. *Legyen H szeparábilis végtelen dimenziós Hilbert-tér. Ekkor $B(H)$ minden valódi ideálja része a kompakt operátorok $C(H)$ ideáljának. Így $B(H)$ egyetlen nemtriviális zárt ideálja $C(H)$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{I} \subset B(H)$ valódi ideál, és tegyük fel, hogy létezik olyan $T \in \mathcal{I}$ operátor, ami nem kompakt. A poláris felbontás miatt ekkor $|T| \in \mathcal{I}$ sem kompakt. Tekintsük a $|T|$ spektrálfelbontását:

$$|T| = \int_{\sigma(|T|)} \lambda d\, E(\lambda).$$

A 2.5.4. Tételben szereplő, a spektrálintegrálnak integrálközelítő összegekkel normában való approximálhatóságáról szóló állítás miatt $\sigma(|T|)$ valamely, a 0-tól pozitív távolságra lévő B Borel-halmaza esetén az $E(B)$ projekciónak végtelen rangúnak kell lennie. Egyébként ugyanis $|T|$ véges rangú operátorokkal lenne approximálható az operátornormában, s ez azt jelentené, hogy $|T|$ kompakt. Könnyen látszik, hogy létezik olyan f korlátos Borel-függvény $|T|$ spektrumán, melyre $f(\lambda)\lambda = \chi_B(\lambda)$ $(\lambda \in \sigma(|T|))$. Innen a függvénykalkulusnak korlátos Borel-függvényekre való kiterjesztését felhasználva kapjuk, hogy $E(B) = A|T|$ teljesül valamely $A \in B(H)$ operátorral. Ezért $E(B) \in \mathcal{I}$. Mivel H szeparábilis és $\operatorname{rng} E(B)$ végtelen dimenziós, így $E(B)$ értékkészlete ugyanolyan (Hilbert-) dimenziós mint H. Következésképpen létezik olyan U parciális izometria, melyre $I = UE(B)U^*$. Innen $I \in \mathcal{I}$ adódik, ami ellentmondás, hiszen $\mathcal{I}$ valódi ideál.

Ha $\mathcal{I}$ nemtriviális zárt ideál, akkor az előzőek miatt $F(H) \subset \mathcal{I} \subset C(H)$, és így az $\overline{F(H)} = C(H)$ összefüggés figyelembevételével kapjuk, hogy $\mathcal{I} = C(H)$. A bizonyítás ezzel teljes.

2.8.8. Definíció. Ha H szeparábilis végtelen dimenziós Hilbert-tér, akkor a $B(H)/C(H)$ C^*-algebrát Calkin-algebrának nevezzük.

2.8.9 . Megjegyzés. A Calkin-algebra igen fontos C^*-algebra, melynek az alábbiakban megemlítjük néhány alapvető tulajdonságát (lásd [5]). Az előző tétel miatt ez az algebra egyszerű, azaz nincs nemtriviális ideálja.

Továbbá könnyű látni, hogy $B(H)/C(H)$ kontinuum sok páronként ortogonális nemnulla projekciót tartalmaz. Egy C^*-algebra önadjungált idempotenseit projekcióknak nevezzük. Két projekciót ortogonálisnak mondunk ha szorzatuk 0. Ezek után az előbbi állítás a következőképpen látható be. Legyen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ egy teljes ortonormált sorozat H-ban. Jelölje Λ az $\mathbb{N}$ végtelen részhalmazainak egy olyan rendszerét, melyek közül bármely kettőnek a metszete véges. Ilyen halmazrendszerhez juthatunk el, ha pl. minden egyes valós számhoz tekintünk egy hozzá konvergáló szigorúan monoton csökkenő racionális számsorozatot. Tetszőleges $\alpha \in \Lambda$ esetén jelölje P_α az $\{x_n : n \in \alpha\}$ által generált zárt altérre vonatkozó ortogonális projekciót. Könnyű látni, hogy ezek mellékosztályai $\overline{P_\alpha}$ $(\alpha \in \Lambda)$ páronként ortogonális nemzérus projekciók a Calkin-algebrában.

Ismeretes, hogy a Calkin-algebra minden projekciója a H valamely projekciójához tartozó mellékosztállyal egyezik meg, és hasonló igaz a Calkin-algebra parciális izometriáira is. Egy C^*-algebra v elemét parciális izometriának nevezzük, ha $vv^*v = v$. Ezek után azt gondolhatnánk, hogy teljesen hasonló állítás igaz az unitér elemek vonatkozásában is. Ez azonban nem igaz. Calkin egy tétele szerint a $B(H)/C(H)$ unitér elemei éppen a véges kodimenziós izometriákhoz illetve adjungáltjukhoz tartozó mellékosztályok. Az világos, hogy a Calkin-algebra önadjungált elemei a $B(H)$ önadjungált elemeiből származtathatók. Hasonló állítás azonban nem igaz a normális elemek vonatkozásában. A Fredholm-index tulajdonságainak felhasználásával egyszerűen belátható, hogy pl. az unilaterális eltolás nem írható fel "normális + kompakt" alakban.

Ami a Calkin-algebra *-reprezentációit illeti, projekciók számosságára és az algebra egyszerűségére vonatkozó fenti észrevételek miatt világos, hogy $B(H)/C(H)$-nak nincs nemzérus *-reprezentációja szeparábilis Hilbert-téren. A [13, 10.4.16. Corollary] állítás azt mondja ki, hogy a Calkin-algebra irreducibilis *-reprezentációinak 2^c számosságú ekvivalenciaosztálya van.

Végezetül emlékeztetünk arra, hogy az 1.8.15. Megjegyzés szerint tetszőleges X Banach-tér esetén a $B(X)$ automorfizmusai és derivációi mind belsők. Természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy vajon ugyanez igaz-e a Calkin-algebrára vonatkozóan is. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a válasz derivációk esetén pozitív (belátható, hogy egyszerű C^*-algebra derivációi mind belsők), azonban az automorfizmusokra vonatkozóan tudtunkkal mindmáig megoldatlan a probléma.

2.9 C^*-algebrák deriválói, automorfizmusai és szürjektív izometriái

Először is megjegyezzük, hogy a Johnson-Sinclair-tétel (1.8.13. Tétel) miatt C^*-algebra minden deriválója folytonos.

2.9.1. Tétel. *Ha $\mathcal{A}$ topológikusan egyszerű C^*-algebra, akkor $\mathcal{A}$ minden deriválója belső, azaz felírható $x \mapsto ax - xa$ alakban valamely $a \in \mathcal{A}$ elemmel.*

Bizonyítás. Lásd [20, 4.1.11. Theorem].

2.9.2. Megjegyzés. Az 1.8.15. Megjegyzésben láttuk, hogy a $B(H)$ minden deriválója $T \mapsto AT - TA$ alakú valamely $A \in B(H)$ operátorral.

Ami a $C(X)$ függvényalgebrát illeti, az 1.8.8. Tétel miatt ennek nincs nemzérus deriválója.

Az automorfizmusok vizsgálatához szükségünk van a következő lemmára:

2.9.3. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ kommutatív C^*-algebra a $\|.\|$ normával. Ha $\|.\|_1$ Banach-algebra norma $\mathcal{A}$-n, akkor $\|.\| \leq \|.\|_1$.*

Bizonyítás. Ha $x \in \mathcal{A}$, akkor – mivel x normális eleme az $\mathcal{A}$ C^*-algebrának – $\|x\| = r(x)$. Másrészt, Banach-algebrában a spektrálsugár mindig kisebb vagy egyenlő mint a norma, ezért $\|x\| = r(x) \leq \|x\|_1$.

2.9.4. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra. Ekkor $\mathcal{A}$ tetszőleges ϕ automorfizmusa korlátos lineáris transzformáció, $\|\phi^{-1}\| = \|\phi\|$ és az automorfizmusok* $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ *csoportja zárt $B(\mathcal{A})$-ban.*

Bizonyítás. A korlátosság adódik Johnsonnak az 1.8.14. Tételben megfogalmazott eredményéből. Legyen $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$. Ha $h \in \mathcal{A}$ tetszőleges önadjungált elem, akkor a $C^*(h)$ kommutatív C^*-algebrán tekintve az $\|x\|_1 = \|\phi(x)\|$ Banach-algebra normát (a teljesség abból adódik, hogy az automorfizmusok korlátossága miatt az $\|.\|$ és $\|.\|_1$ normák ekvivalensek $\mathcal{A}$-n), a 2.9.3. Lemma figyelembevételével kapjuk, hogy $\|h\| \leq \|\phi(h)\|$. Legyen most $x \in \mathcal{A}$ tetszőleges. Ekkor

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|\phi(x^*x)\| =$$

$$\|\phi(x^*)\phi(x)\| \leq \|\phi\|\|x^*\|\|\phi(x)\| \leq \|\phi\|\|x\|\|\phi(x)\|,$$

ahol felhasználtuk az involúció izometrikusságát. Innen kapjuk, hogy $\|x\| \leq \|\phi\|\|\phi(x)\|$, amiből rögtön adódik, a $\|\phi^{-1}\| \leq \|\phi\|$ összefüggés. Ezt ϕ helyett ϕ^{-1}-re alkalmazva, kapjuk, hogy $\|\phi^{-1}\| = \|\phi\|$. Legyen most (ϕ_n) automorfizmusok egy sorozata, mely $B(\mathcal{A})$ normájában konvergál ψ-hez. Világos, hogy ψ homomorfizmus. Nyilvánvaló továbbá, hogy $\psi = \phi_n(I - \phi_n^{-1}(\phi_n - \psi))$. Legyen M olyan pozitív szám, melyre $\|\phi_n^{-1}\| = \|\phi_n\| \leq M$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Elég nagy n indexre kapjuk, hogy $\|\phi_n - \psi\| < 1/M$. Ekkor $\|\phi_n^{-1}(\phi_n - \psi)\| \leq \|\phi_n^{-1}\|\|\phi_n - \psi\| < 1$ miatt $I - \phi_n^{-1}(\phi_n - \psi)$ invertálható. Innen már az előzőek figyelembevételével adódik a ψ invertálhatósága.

Emlékeztetőül megjegyezzük, hogy a 2.5.7. Tétel miatt C^*-algebrák *-automorfizmusai mind izometriák.

2.9.5. Példa. Az 1.8.15. Megjegyzésben láttuk, hogy hogyan néznek ki a $B(H)$ automorfizmusai. Ami ezen C^*-algebra *-automorfizmusait illeti, könnyű megmutatni, hogy ezek éppen az

$$A \longmapsto UAU^*$$

alakú leképezések, ahol U alkalmas unitér operátor.

Ami a $CX)$ függvényalgebrát illeti, az 1.8.15. Megjegyzésben láttuk, hogy ennek minde automorfizmusa $f \mapsto f \circ \varphi$ alakú, ahol $\varphi : X \to X$ homeomorfizmus.

2.9.6. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ topológikusan egyszerű C^*-algebra. Ha ϕ olyan automorfizmusa $\mathcal{A}$-nak, melyre $\sigma(\phi) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, akkor ϕ belső automorfizmus, azaz $\phi(x) = axa^{-1}$ $(x \in \mathcal{A})$ teljesül valamely $a \in \mathcal{A}$ esetén. Ha ϕ *-automorfizmus, akkor az előbbi $a \in \mathcal{A}$ elem unitér.*

Bizonyítás. Lásd [20, 4.1.19. Theorem].

2.9.7. Tétel. *Ha az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ C^*-algebrák izomorfak, akkor ők *-izomorfak is.*

Bizonyítás. Lásd [20, 4.1.20. Theorem]

A szakasz visszamaradó részében C^*-algebrák szürjektív lineáris izometriáival foglalkozunk. A kérdés az, hogy ha két ilyen gazdag struktúra geometriája megegyezik, akkor ők vajon mennyire tekinthetők azonosnak algebrai szempontból? Világos, hogy minden szürjektív lineáris izometria megőrzi a zárt egységgömb extremális pontjait. Ezért van jelentősége ezen pontok alábbi algebrai jellemzésének:

2.9.8. Tétel. (Kadison) *Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra és $x \in \mathcal{A}$, $\|x\| \leq 1$. Az x akkor és csak akkor extremális pontja $\mathcal{A}$ zárt egységgömbjének, ha $(1 - x^*x)\mathcal{A}(1 - xx^*) = \{0\}$.*

B i z o n y í t á s. Lásd [11].

Az $\mathcal{R}$ gyűrűt prímnek nevezzük, ha tetszőleges $a, b \in \mathcal{R}$ esetén $a\mathcal{R}b = \{0\}$-ból következik, hogy $a = 0$ vagy $b = 0$.

Ha H Hilbert-tér, akkor könnyű látni, hogy a $B(H)$-nak minden olyan részalgebrája, mely tartalmazza a véges rangú operátorok ideálját, prím algebra. Innen kapjuk az alábbi következményt:

2.9.9. Következmény. *Legyen H Hilbert-tér. A $B(H)$ zárt egységgömbjének extremális pontjai éppen az izometriák és a koizometriák, azaz azon U operátorok, melyekre vagy $U^*U = I$, vagy $UU^* = I$.*

2.9.10. Definíció. Legyenek $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ gyűrűk. Egy $\phi : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ additív függvényt Jordan-homomorfizmusnak nevezzük, ha $\phi(x)^2 = \phi(x^2)$ teljesül minden $x \in \mathcal{R}_1$ esetén.

Világos, hogy minden homomorfizmus és minden antihomomorfizmus (azaz olyan $\phi : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ additív függvény, melyre $\phi(xy) = \phi(y)\phi(x)$ $(x, y \in \mathcal{R}_1)$) Jordan-homomorfizmus.

2.9.11. Tétel. (Kadison) *Legyenek $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ C^*-algebrák és $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ szürjektív lineáris izometria. Ekkor létezik olyan $u \in \mathcal{B}$ unitér elem és $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Jordan-*-izomorfizmus, melyre*

$$\psi(x) = u\phi(x) \qquad (x \in \mathcal{A})$$

(Jordan--homomorfizmuson természetesen olyan ϕ Jordan-homomorfizmust értünk, melyre $\phi(x)^* = \phi(x^*)$ $(x \in \mathcal{A})$).*

B i z o n y í t á s. Lásd [11]. A bizonyítás alapgondolata az, hogy ψ az $\mathcal{A}$ zárt egységgömbjének extremális pontjait a $\mathcal{B}$ zárt egységgömbjének extremális pontjaiba képezi, mely pontok algebrailag jellemezhetőek, ahogy azt a 2.9.8. Tételben láttuk.

Abban az esetben, ha $\mathcal{B}$ prím C^*-algebra, akkor a szürjektív izometriák pontosabb leírásában felhasználhatjuk Herstein alábbi klasszikus tételét:

2.9.12. Tétel. (Herstein) *Legyen $\mathcal{R}_1$ gyűrű, $\mathcal{R}_2$ pedig 2-torzió-mentes prím gyűrű. Ha $\phi : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ szürjektív Jordan-homomorfizmus, akkor ϕ vagy homomorfizmus vagy antihomomorfizmus.*

B i z o n y í t á s. Lásd [9]. Ott az $\mathcal{R}_2$ gyűrűre vonatkozóan feltételként szerepel még a 3-torzió mentesség, ez a feltétel azonban elhagyható, amint arról meggyőződhetünk például a [16, 6.3.2 Lemma, 6.3.6 Lemma és 6.3.7 Theorem] bizonyításait követve.

A 2.9.5. Példa során láttuk, hogy hogyan néznek ki a $B(H)$ *-automorfizmusai. Mivel a *-antiautomorfizmusok alakja ezekhez teljesen hasonlóan kapható meg, Herstein tételének felhasználásával könnyen adódik a $B(H)$ szürjektív izometriáinak általános alakja.

2.9.13 . Következmény. *Legyen $\psi : B(H) \to B(K)$ szürjektív lineáris izometria. Ekkor léteznek olyan $U : H \to K$, $V : K \to H$ unitér operátorok, melyekre*

$$\psi(A) = UAV \qquad (A \in B(H)),$$

vagy

$$\psi(A) = UA^{tr}V \qquad (A \in B(H)),$$

ahol ^{tr} a H egy rögzített teljes ortonormált rendszerére vonatkozó transzponálás műveletét jelöli.

Ami a $C(X)$ függvényalgebrák izometriáit illeti, igaz a következő eredmény.

2.9.14 . Következmény. (Banach-Stone) *Legyenek X, Y kompakt Hausdorff-terek. Ha $\psi : C(X) \to C(Y)$ szürjektív lineáris izometria, akkor létezik olyan $\varphi : Y \to X$ homeomorfizmus és $\tau : Y \to \mathbb{C}$ folytonos függvény, melyre $|\tau(y)| = 1$ $(y \in Y)$ és*

$$\psi(f) = \tau \cdot f \circ \varphi \qquad (f \in C(X)).$$

Tehát ha a $C(X)$ és $C(Y)$ Banach-terek izometrikusak, akkor az X és Y topológikus terek homeomorfak.

2.10 A Toeplitz-algebra és a BDF-elmélet

Ebben a szakaszban H egy szeparábilis végtelen dimenziós Hilbert-teret jelöl.

2.10.1 . Definíció. Legyen (e_n) teljes ortonormált sorozat H-ban és jelölje S az ehhez tartozó unilaterális eltolást, azaz legyen $S = \sum_n e_{n+1} \otimes e_n$. A $B(H)$-nak az I, S operátorok által generált $C^*(S)$-sel jelölt C^*-részalgebráját Toeplitz-algebrának nevezzük.

2.10.2 . Tétel. (Coburn) *Létezik olyan*

$$0 \to C(H) \hookrightarrow C^*(S) \xrightarrow{\phi} C(\mathbb{T}) \to 0 \tag{2.9}$$

rövid egzakt sorozat, melyre $\phi(S)$ az identikus függvény a $\mathbb{T}$ komplex egységkörön.

2.10.3. Megjegyzés. Itt is és a további rövid egzakt sorozatok esetén is, az $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ jelölést akkor használjuk, ha $\mathcal{A}$ zárt ideálja a $\mathcal{B}$ C^*-algebrának és $\mathcal{A}$ identikusan beágyazott $\mathcal{B}$-be. A nyilak fölött szereplő leképezések *-homomorfizmusok. A Coburn-tételben szereplő egzakt sorozat jelentése tehát röviden annyi, hogy $C(H) \subset C^*(S)$ és a $C^*(S)/C(H)$ faktoralgebra, mint C^*-algebra, *-izomorf a $C(\mathbb{T})$ függvényalgebrával.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $C^*(S)$ tartalmazza $C(H)$-t. Mivel az e_1 által generált altérre való P projekció felírható $P = I - SS^*$ alakban, így $P \in C^*(S)$. Ha $\{0\} \neq M$ zárt invariáns altere a $C^*(S)$ operátoralgebrának és $x = \sum_n \lambda_n e_n \in M$, $\lambda_{n_0} \neq 0$, akkor $PS^{*n_0-1}x = \lambda_{n_0} e_1$ is eleme M-nek, tehát $e_1 \in M$. Innen ugyancsak az M invarianciája miatt adódik, hogy $e_n = S^n e_1 \in M$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ebből kapjuk, hogy $M = H$, tehát a $C^*(S)$ algebra irreducibilis. A 2.7.15. Tétel miatt $P \in C^*(S)$ figyelembevételével adódik, hogy $C(H) \subset C^*(S)$.

Mivel $S^*S = I$, ezért az $\sum_k \lambda_k S^{n_k} S^{*m_k}$ alakú kifejezések *-algebrát alkotnak, s ezért ezek sűrűn vannak $C^*(S)$-ben. Mellékosztályokra áttérve, innen kapjuk, hogy a $\sum_k \lambda_k \overline{S}^{n_k} \overline{S^*}^{m_k}$ alakú kifejezések sűrűn vannak $C^*(S)/C(H)$-ban. Mivel az $S^*S - SS^* = P$ operátor kompakt, így $\overline{S}$ a Calkin-algebra normális eleme. Ezért a $\sum_k \lambda_k \overline{S}^{n_k} \overline{S^*}^{m_k}$ alakú kifejezések egymással felcserélhetőek, tehát $C^*(S)/C(H)$ kommutatív C^*-algebra, ami megegyezik az $\overline{S}$ által a Calkin-algebrában generált kommutatív C^*-részalgebrával. A folytonos függvénykalkulusnál tanultak miatt C^*-algebra normális eleme által generált kommutatív C^*-részalgebra izometrikusan *-izomorf az ezen elem spektrumán folytonos függvények algebrájával. Meg kell tehát határoznunk az $\overline{S}$ elem Calkin-algebrára vonatkozó spektrumát. A Calkin-algebrában való invertálhatóság kritériuma ismeretes. Atkinson tétele ([15, 1.4.16. Theorem]) szerint egy $A \in B(H)$ operátornak a Calkin-algebrában vett képe pontosan akkor invertálható, ha A Fredholm-operátor, azaz ha A zárt értékkészletű, és magjának dimenziója, illetve értékkészletének kodimenziója véges. Ezek miatt a keresett spektrum a

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, S - \lambda I \text{ nem Fredholm}\}$$

síkbeli halmaz, amiről belátható, hogy egyenlő $\mathbb{T}$-vel. A fentiek miatt létezik $\psi : C^*(S)/C(H) \to C(\mathbb{T})$ izometrikus *-izomorfizmus. Ha $\pi : B(H) \to B(H)/C(H)$ a természetes homomorfizmus, akkor a $\phi(A) = \psi(\pi(A))$ $(A \in C^*(S))$ módon definiált leképezés egy olyan szürjektív *-homomorfizmusa a $C^*(S)$-nek $C(\mathbb{T})$-re, aminek magja $C(H)$. A bizonyítás ezzel teljes.

2.10.4. Tétel. (Coburn) *Ha V tetszőleges nemszürjektív izometria H-n, akkor egy és csak egy olyan $\phi : C^*(V) \to C^*(S)$ izometrikus *-izomorfizmus létezik, melyre $\phi(V) = S$.*

B i z o n y í t á s. Lásd [7, Theorem V.2.2].

A Toeplitz-algebrához való eljutás klasszikusabb módja a következő. Jelölje $H^2(\mathbb{T})$ az $L^2(\mathbb{T})$ azon zárt alterét, melyet az $1, z, z^2, \ldots$ függvények generálnak. Tetszőleges $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ esetén jelölje T_g a

$$T_g h = P_{H^2} gh \qquad (h \in H^2(\mathbb{T}))$$

módon definiált operátort, ahol P_{H^2} az $L^2(\mathbb{T})$ térnek a $H^2(\mathbb{T})$ altérre való ortogonális projekcióját jelöli. Speciálisan, T_z éppen az unilaterális eltolás. A T_g operátorokat Toeplitz-operátoroknak nevezzük, az operátorelmélet egyik legvizsgáltabb operátorosztályát képezik.

Ezek után belátható a következő eredmény (a bizonyításért lásd pl. [7, Theorem V.1.5]).

2.10.5. Tétel. *A T_z Toeplitz-operátor által generált C^*-algebrára*

$$C^*(T_z) = \{T_f + K \,:\, f \in C(\mathbb{T}),\, K \in C(L^2(\mathbb{T}))\}.$$

2.10.6. Definíció. Legyen X kompakt metrikus tér. Legyen $\mathcal{A} \subset B(H)$ egy, az I-t tartalmazó C^*-részalgebra. Ha létezik

$$0 \to C(H) \hookrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} C(X) \to 0$$

rövid egzakt sorozat, akkor az $(\mathcal{A}, \phi)$ párra azt mondjuk, hogy egy kiterjesztése $C(H)$-nak $C(X)$-szel.

Két kiterjesztést a

$$0 \to C(H) \hookrightarrow \mathcal{A}_1 \xrightarrow{\phi_1} C(X) \to 0$$

és a

$$0 \to C(H) \hookrightarrow \mathcal{A}_2 \xrightarrow{\phi_2} C(X) \to 0$$

rövid egzakt sorozatokkal ekvivalensnek nevezünk, ha van olyan $\psi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ *-izomorfizmus, melyre $\phi_1 = \phi_2 \circ \psi$.

Világos, hogy a (2.9) egzakt sorozat egy kiterjesztését, mégpedig az ún. Toeplitz-kiterjesztését adja $C(H)$-nak $C(\mathbb{T})$-vel. Természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy hogyan lehet meghatározni a $C(\mathbb{T})$-vel történő összes kiterjesztést? Ennek a problémának a megválaszolása, illetve a 2.10.6. Definícióban szereplő kiterjesztéseket vizsgáló egész elmélet kidolgozása Brown, Douglas és Fillmore nevéhez fűződik, melyet ezért BDF-elméletnek szokás nevezni. Ennek jelentőségéről a [7] könyben azt olvashatjuk, hogy

a Gelfand-Naimark-tétel után valószínűleg a legnagyobb eredménynek tekinthető a C^*-algebrák kiterjedt elméletében.

Amint látni fogjuk, Brown, Douglas és Fillmore munkája egy tisztán operátorelméleti probléma megoldása érdekében létrejött, mély operátorelméleti, C^*-algebrai és algebrai topológiai eredményeket illetve eszközöket ötvöző gyönyörű elmélet.

A szóbanforgó operátorelméleti probléma története a következő. Weyl 1909-ben megmutatta, hogy önadjungált operátor spektrumának a torlódási pontjaiból és a végtelen multiplicitású izolált pontjaiból (ezek mind sajátértékek) álló részhalmaza nem változik az operátor kompakt perturbációi esetén. Neumann János 1934-ben felhasználva azt az eredményt, hogy H-n minden önadjungált operátor előáll egy egy diagonális önadjungált és egy kompakt önadjungált operátor összegeként, bebizonyította Weyl tételének következő megfordítását: Ha A, B önadjungált operátorok, és spektrumaik fentiekben leírt részhalmazai megegyeznek, akkor A és B unitér-ekvivalensek modulo $C(H)$, azaz létezik olyan $U \in B(H)$ unitér operátor, melyre $UBU^* - A$ kompakt. Berg 1970-ben kiterjesztette Neumann fenti tételét tetszőleges normális operátorokra. Ezen eredmény megfogalmazásához szükségünk lesz a következő fogalomra.

Ha $T \in B(H)$ tetszőleges operátor, akkor T lényeges spektrumán a

$$\begin{aligned}\sigma_e(T) =& \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ képe nem invertálható a Calkin-algebrában}\}\\ =& \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ nem Fredholm-operátor}\}\end{aligned}$$

halmazt értjük. Ismeretes, hogy normális T operátor esetén T spektrumának torlódási pontjaiból és végtelen multiplicitású izolált pontjaiból álló részhalmaza éppen a T lényeges spektruma. Ezekután Berg eredménye a következőképpen fogalmazható meg:

2.10.7. Tétel. (Berg) *Legyen T, S normális operátor H-n. Pontosan akkor létezik olyan $U \in B(H)$ unitér operátor, melyre $T - USU^*$ kompakt, ha $\sigma_e(T) = \sigma_e(S)$.*

Mivel itt a Calkin-algebrában való egyfajta kapcsolatról van szó, természetes módon vetődött fel a kérdés, hogy hogyan lehetne a lényegében normális operátorok (ezek azon $T \in B(H)$ operátorok, melyekre $T^*T - TT^*$ kompakt) körében az unitér ekvivalenciát jellemezni modulo $C(H)$. Erre a kérdésre adott választ 1973-ban a BDF-elmélet. Nevezetesen, bizonyítást nyert a következő tétel.

2.10.8. Tétel. (Brown-Douglas-Fillmore) *Legyenek $T, S \in B(H)$ lényegében normális operátorok. Pontosan akkor létezik olyan $U \in B(H)$ unitér operátor, melyre $T - USU^*$ kompakt, ha*

(i) $\sigma_e(T) = \sigma_e(S)$;

(ii) $\operatorname{ind}(T - \lambda I) = \operatorname{ind}(S - \lambda I)$ *minden* $\lambda \notin \sigma_e(T)$ *esetén.*

Itt ind a Fredholm-indexet jelöli, azaz ha T Fredholm-operátor, akkor $\operatorname{ind} T = \dim \ker T - \operatorname{codim} \operatorname{rng} T$. A Fredholm-index alapvető tulajdonságai közül megemlítjük a következőket (lásd [17, 3.3.18 Proposition, 3.3.19. Proposition]). Az ind függvény folytonos és egészértékű. Ha T, S Fredholm-operátor, akkor $\operatorname{ind}(TS) = \operatorname{ind}(T) + \operatorname{ind}(S)$.

A 2.10.8. Tételre csak az utóbbi időkben, egészen pontosan 1991-ben sikerült "tisztán" operátorelméleti bizonyítást adni mégpedig Berg-nek és Davidson-nak. A probléma mélységét jellemzi, hogy ezen bizonyítás 40 oldal hosszú, de a kiterjesztések elméletén keresztül való bizonyítást sem sikerült több 10 oldalasról leredukálni.

Mi köze van a 2.10.8. Tételben adott karakterizációnak a kiterjesztésekhez? Ha T lényegében normális operátor, akkor $B(H)$-nak az $I, T, C(H)$ által generált C_T-vel jelölt C^*-részalgebrájára $B(H)$-nak kapjuk, hogy $C_T/C(H)$ kommutatív C^*-algebra, s mivel ezt $\overline{T} = T + C(H)$ generálja, így, a Coburn-tétel (2.10.2. Tétel) bizonyításához hasonlóan belátható, hogy $C_T/C(H)$ izometrikusan *-izomorf a T-nek a Calkin-algebrára vonatkozó spektrumán, azaz a $\sigma_e(T)$ halmazon értelmezett folytonos függvények algebrájával. Ha $\phi_T : C_T/C(H) \to C(\sigma_e(T))$ jelöli azt az egyértelműen meghatározott *-izomorfizmust, melynél az egységelem képe az azonosan 1 függvény, $\overline{T}$-jé pedig az identikus függvény, akkor felírható a

$$0 \to C(H) \hookrightarrow C_T \xrightarrow{\phi_T \circ \pi} C(\sigma_e(T)) \to 0 \tag{2.10}$$

rövid egzakt sorozat. Ha most T, S lényegében normális operátorok megegyező lényeges spektrummal, azaz ha $\sigma_e(T) = \sigma_e(S) = X \subset \mathbb{C}$, akkor belátható, hogy T és S pontosan akkor unitér-ekvivalensek modulo $C(H)$, ha a megfelelő $(C_T, \phi_T \circ \pi)$, $(C_S, \phi_S \circ \pi)$ kiterjesztések ekvivalensek. Így jutunk el a lényegében normális operátorok modulo $C(H)$ unitér ekvivalenciájának kérdésétől a kiterjesztések problémaköréhez, tehát egy ún. "single operator theoretical" kérdéstől egy C^*-algebrai problémához.

Lássuk most a BDF-elmélet elemeit. A részleteket illetően utalunk a [7] könyv IX. Fejezetére és a [22] dolgozatra, illetve, természetesen, az ezek irodalomjegyzékében fellelhető eredeti BDF-dolgozatra.

Rögzítsünk egy X kompakt metrikus teret. Először is szükségünk lesz a kiterjesztéseknek egy másik, de a fentivel egyenértékű megfogalmazására. Ha $\tau : C(X) \to B(H)/C(H)$ injektív *-homomorfizmus, melyre $\tau(1) = \overline{I}$, akkor τ-ra azt mondjuk, hogy a $C(H)$ egy kiterjesztése $C(X)$-szel. Ha adott egy $(\mathcal{A}, \phi)$ kiterjesztésünk a régi értelemben, akkor ez indukál egy $\overline{\phi} : \mathcal{A}/C(H) \to C(X)$ *-izomorfizmust. A $\tau = \overline{\phi}^{-1}$ leképezés kiterjesztés az utőbi értelemben. Megfordítva, ha $\tau : C(X) \to B(H)/C(H)$ egy kiterjesztés az utóbbi értelemben, akkor az $\mathcal{A} = \pi^{-1}(\tau(C(X)))$ egy, az I-t tartalmazó C^*-részalgebrája $B(H)$-nak és $\phi = \tau^{-1} \circ \pi : \mathcal{A} \to C(X)$ szürjektív *-homomorfizmus, melyre

$\ker \phi = C(H)$. Tehát $(\mathcal{A}, \phi)$ egy kiterjesztés a régi értelemben, melyhez a fentiek szerint tartozó, új értelemben vett kiterjesztés éppen τ. Így a két kiterjesztésfogalom egymással egyenértékű.

Legyenek $\tau_1, \tau_2 : C(X) \to B(H)/C(H)$ kiterjesztések. Azt mondjuk, hogy τ_1 és τ_2 ekvivalensek, ha létezik olyan $U \in B(H)$ unitér operátor, melyre $\tau_1(f) = \overline{U}\tau_2(f)\overline{U}^*$ $(f \in C(X))$. Nem nehéz látni, hogy ahogyan a kiterjesztésekre a fentiekben adott két fogalom egyenértékű, ugyanez áll a kiterjesztések ekvivalenciájára is. A fenti "fogalomduplázásnak" az az értelme, hogy bizonyos esetekben az egyikkel, míg máskor a másikkal kényelmesebb dolgozni.

Jelölje $\mathrm{Ext}(X)$ a $\tau : C(X) \to B(H)/C(H)$ kiterjesztések $[\tau]$ ekvivalenciaosztályainak halmazát. $\mathrm{Ext}(X)$-en definiálható egy $+$-szal jelölt művelet a következőképpen

$$[\tau_1] + [\tau_2] = [\tau_1 \oplus \tau_2].$$

A definíció implicit módon tartalmazza a következőket. A $B(H)/C(H)$ elemeiből képzett 2×2-es matrixok $M_2(B(H)/C(H))$ algebrája beazonosítható $B(H)/C(H)$-val. Ezt azért tehetjük meg, mert H szeparábilis végtelen dimenziós Hilbert-tér, s ezért $H \oplus H$ izomorf H-val. Ezen utóbbi (unitér-) izomorfia egy olyan beazonosítást indukál $M_2(B(H))$ és $B(H)$ elemei között között, melynél $M_2(C(H))$-nak éppen $C(H)$ felel meg. Könnyű látni, hogy a fenti definíció korrekt abban az értelemben, hogy nem függ $\mathrm{Ext}(X)$ elemeinek reprezentánsválasztásától.

A BDF-elmélet első alaptétele a következő.

2.10.9. Tétel. (Brown-Douglas-Fillmore) $\mathrm{Ext}(X)$ *a fenti művelettel kommutatív csoport.*

Ezen tétel bizonyítása, amit itt nem tárgyalunk, igen komoly eszközöket igényel. Mi lehet $\mathrm{Ext}(X)$ neutrális eleme? Ez az ún. triviális kiterjesztés. A $\tau : C(X) \to B(H)/C(H)$ kiterjesztést triviálisnak nevezzünk, ha van "unital lifting"-je, azaz ha létezik olyan $\rho : C(X) \to B(H)$ *-homomorfizmus, melyre $\rho(1) = I$ és $\tau = \pi \circ \rho$ (ekkor ρ szükségszerűen injektív). Lényegében normális operátorokkal kapcsolatban meg lehet mutatni, hogy a $T \in B(H)$ lényegében normális operátor által generált (2.10) kiterjesztés pontosan akkor triviális, ha T felírható "normális + kompakt" alakban (vö. a 2.8.9. Megjegyzésben említettekkel).

Belátható, hogy tetszőleges X kompakt metrikus tér esetén van triviális kiterjesztés, mégpedig ekvivalenciától eltekintve pontosan egy. Megjegyezzük, hogy abban az esetben, ha X "pusztán csak" egy kompakt Hausdorff-tér (nem pedig, ahogy mi feltételeztük, kompakt metrikus tér) akkor esetleg nincs $\tau : C(X) \to B(H)/C(H)$ triviális kiterjesztés. Ez a helyzet pl. a $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ térrel. Itt $\beta\mathbb{N}$ az $\mathbb{N}$ úgynevezett Stone-Čech-féle kompaktifikáltját

jelöli, ami a C^*-algebrák nyelvén éppen az $\ell_\infty(\mathbb{N})$ struktúratere, tehát az a homeomorfia erejéig egyértelműen meghatározott kompakt Hausdorff-tér, melyre $\ell_\infty(\mathbb{N}) \cong C(\beta\mathbb{N})$. Könnyű látni, hogy $C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \cong \ell_\infty(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$, ami a Calkin-algebrához hasonlóan kontinuum sok páronként ortogonális nemzérus projekciót tartalmaz, s így nem reprezentálható injektív módon szeparábilis Hilbert-téren. Tehát nincs olyan $\tau : C(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}) \to B(H)/C(H)$ kiterjesztés, aminek lenne "unital lifting"-je.

Megmutatható tehát, hogy a triviális kiterjesztések ekvivalenciaosztálya adja $\mathrm{Ext}(X)$ neutrális elemét. Lássunk két egyszerű példát olyan X kompakt metrikus térre, melyre $\mathrm{Ext}(X) = \{0\}$ teljesül, azaz amikor $C(H)$-nak $C(X)$-szel való minden kiterjesztése triviális. Bebizonyítható, hogy ez a helyzet abban az esetben, ha $C(X)$ egy darab valós függvénnyel generálható (például ha $X \subset \mathbb{R}$ kompakt részhalmaz), vagy ha $C(X)$-et generálják a projekciói.

Tekintsük most az $X = \mathbb{T}$ esetet. Hogyan fogalmazható meg ebben a speciális esetben a kiterjesztések leírásának kérdése? Mivel $C(\mathbb{T})$-t generálják a $z, \overline{z}$ függvények, így egy tetszőleges τ kiterjesztést elég csak a z függvényen ismerni. A $\tau(z)$ szükségképpen unitér eleme a Calkin-algebrának és (a Calkin-algebrára vonatkozó) spektruma éppen $\mathbb{T}$. Könnyen látható, hogy ez a kapcsolat meg is fordítható, azaz tetszőleges unitér eleme a Calkin-algebrának, aminek spektruma $\mathbb{T}$, indukál egy $\tau : C(\mathbb{T}) \to B(H)/C(H)$ kiterjesztést. Így az $\mathrm{Ext}(\mathbb{T})$ csoport leírása a Calkin-algebra azon unitér elemeinek a modulo $C(H)$ unitér-ekvivalencia erejéig történő meghatározásával egyenértékű, mely unitér elemek spektruma $\mathbb{T}$.

Tekintsük a Toeplitz-kiterjesztést, ami a $C(H)$ egy kiterjesztése $C(\mathbb{T})$-vel. Belátható, hogy a (2.9) rövid egzakt sorozattal megadott kiterjesztés a kiterjesztések utóbb adott fogalmát tekintve $\tau(f) = \pi(T_f)$ $(f \in C(\mathbb{T}))$ módon adható meg. A $\tau(C(\mathbb{T}))$ C^*-algebrát generálja a $T_z + C(H)$ mellékosztály. Ezen mellékosztály elemeinek közös jellemzője a Fredholm-indexük, ami -1. Nyilvánvaló, hogy ezen kiterjesztés segítségével a kiterjesztések közötti művelet definícióját figyelembe véve megkaphatjuk az $\mathrm{Ext}(\mathbb{T})$ egy olyan részcsoportját, ami izomorf az egész számok $\mathbb{Z}$ additív csoportjával.

A következő tétel azt mutatja, hogy a fentiekben konstruált kiterjesztésekkel megkapjuk $\mathrm{Ext}(\mathbb{T})$ összes elemét.

2.10.10. Tétel. (Brown-Douglas-Fillmore) $\mathrm{Ext}(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}$. *A Fredholm-index segítségével a* $\gamma_{\mathbb{T}}([\tau]) = \operatorname{ind} \tau(z)$ *módon definiált* $\gamma_{\mathbb{T}}$ *leképezés csoportizomorfizmusa* $\mathrm{Ext}(\mathbb{T})$*-nek* $\mathbb{Z}$*-re.*

Mi a helyzet általánosabb X metrikus terek esetén? Ezen kérdés tárgyalásához szükségünk van a következő fogalomra. Legyen X kompakt metrikus tér. Tekintsük a $C(X)$ C^*-algebra invertálható elemeinek topológikus csoportját. Ezen csoportnak az

1 komponensére (ez Lorch tétele, a 1.3.19. Tétel miatt éppen az e^f ($f \in C(X)$) alakú függvények által alkotott részcsoport) vonatkozó faktorcsoportját X első kohomotópia-csoportjának nevezzük és $\pi^1(X)$-szel jelöljük. Megmutatható, hogy $\pi^1(X)$ megegyezik az $f : X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ függvények homotópia-osztályainak csoportjával (a művelet természetesen a függvények pontonkénti szorzásából adódik).

Bebizonyítható, hogy a komplex sík tetszőleges X kompakt részhalmazára $\pi^1(X)$ megegyezik a $[z - \lambda_n]$ homotópia-osztályok által generált szabad Abel-csoporttal, ahol $\{\lambda_n\}_n$ egy olyan halmaz mely pontosan egy λ_n pontot tartalmaz a $\mathbb{C} \setminus X$ minden korlátos komponenséből.

Definiáljuk a

$$\gamma_X : \mathrm{Ext}(X) \to \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$$

leképezést a

$$\gamma_X([\tau])([f]) = \mathrm{ind}\,(\tau(f)) \qquad ([f] \in \pi^1(X))$$

összefüggéssel. Mivel a kiterjesztések körében az ekvivalencia definíciója szerint $[\tau_1] = [\tau_2]$ pontosan akkor áll fenn ha létezik olyan $U \in B(H)$ unitér operátor, melyre $\tau_1(f) = \overline{U}\tau_2(f)\overline{U^*}$ ($f \in C(X)$), így a Fredholm-index tulajdonságai miatt γ_X definíciójában a jobb oldal nem függ a kiterjesztések reprezentánsválasztásától. Továbbá, mivel a Fredholm-index $\mathbb{Z}$-beli értékeket felvevő folytonos függvény, így ind homotópia-invariáns. Ezért γ_X jobb oldala nem függ az $[f]$ homotópia-osztályok reprezentánsválasztásától sem. Végezetül, mivel a Fredholm-operátorok szorzatának indexe az egyes indexek összege, kapjuk, hogy γ_X az $\mathrm{Ext}(X)$-et $\mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$-be képező csoporthomomorfizmus.

A BDF-elmélet fő eredménye, melynek segítségével sikerült a 2.10.8. Tételbeli karakterizációt megkapni, a következő.

2.10.11 . Tétel. (Brown-Douglas-Fillmore) *Ha $X \subset \mathbb{C}$ a sík kompakt részhalmaza, akkor a fentiekben definiált $\gamma_X : \mathrm{Ext}(X) \to \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ leképezés csoportizomorfizmus.*

Ezen tételből már könnyen adódik a nevezetes 2.10.8. Tétel. Valóban, a szakaszban említett eredmények miatt, ha $T, S \in B(H)$ lényegében normális operátorok megegyező $\sigma_e(T) = \sigma_e(S) = X$ spektrummal, továbbá teljesül hogy $\mathrm{ind}\,(T - \lambda I) = \mathrm{ind}\,(S - \lambda I)$ minden $\lambda \notin X$ esetén, akkor a T, S-hez kapcsolódó τ_T, τ_S kiterjesztésekre fennáll, hogy

$$\gamma_X([\tau_T])([z - \lambda]) = \mathrm{ind}\,(T - \lambda) = \mathrm{ind}\,(S - \lambda) = \gamma_X([\tau_S])([z - \lambda])$$

($\lambda \in \mathbb{C} \setminus X$). Mivel a $[z - \lambda]$ homotópia-osztályok generálják az X kohomotópia-csoportját, ezért $\gamma_X([\tau_T]) = \gamma_X([\tau_S])$. A 2.10.11. Tétel alapján innen az következik, hogy a τ_T és τ_S kiterjesztések ekvivalensek, amiből kapjuk, hogy T, S unitér-ekvivalensek modulo $C(H)$.

Végezetül megemlítjük azt a nagyon érdekes eredményt, mely szerint a fenti tétel állítása igaz marad a 3-dimenziós esetben, tehát $\mathbb{R}^3$ kompakt részhalmazai esetén is, azonban érvényét veszti ennél magasabb dimenziókban. Ami a $\mathbb{T}$ magasabb dimenziós megfelelőjét, tehát az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér zárt egységgömbjének S^{n-1}-gyel jelölt felületét illeti, bizonyítást nyert, hogy páros n esetén esetén $\mathrm{Ext}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$, míg a páratlan esetben $\mathrm{Ext}(S^{n-1}) = \{0\}$, tehát ekkor csak triviális kiterjesztés létezik.

2.11 AF algebrák

2.11.1 . Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ véges dimenziós C^*-algebra. Ekkor $\mathcal{A}$ izometrikusan *-izomorf véges sok teljes matrixalgebra direktösszegével.*

B i z o n y í t á s. (Vázlat) Legyen $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ irreducibilis *-reprezentáció. Ekkor $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I$, amiből $\pi(\mathcal{A})'' = B(H)$. A 3. Fejezetben majd megismerkedünk von Neumann dupla kommutáns tételével. Eszerint $B(H)$ tetszőleges $\mathcal{B}$, az I-t tartalmazó *-részalgebrájának dupla kommutánsa, $\mathcal{B}''$ megegyezik $\mathcal{B}$-nek az ún. erős vagy gyenge operátor topológiában vett lezártjával. Jelen esetben $\pi(\mathcal{A})$ véges dimenziós altér és így minden lokálisan konvex topológiában zárt. Következésképpen $\pi(\mathcal{A}) = B(H)$. Innen kapjuk, hogy H véges dimenziós.

Megmutatható, hogy C^*-algebra minden f korlátos lineáris funkcionálja előáll $f = \rho_1 - \rho_2 + i(\rho_3 - \rho_4)$ alakban, ahol $\rho_1, \ldots, \rho_4$ pozitív lineáris funkcionálok (lásd pl. [12, 4.3.6. Theorem és 4.3.7. Corollary]). A Krein-Milman tétel és $\mathcal{A}$ véges dimenziós volta miatt $\mathcal{A}$ minden állapota tiszta állapotok konvex kombinációja. Így kapjuk, hogy létezik $\mathcal{A}$ tiszta állapotainak véges hű rendszere (lásd a Gelfand-Naimark tétel bizonyítását). Mivel tiszta állapothoz a Gelfand-Naimark-Segal konstrukció szerint tartozó *-reprezentáció irreducibilis, ezért $\mathcal{A}$ izometrikusan *-izomorf egy $\pi_1(\mathcal{A}) \oplus \ldots \oplus \pi_n(\mathcal{A})$ direkt összeggel, ahol $\pi_1, \ldots, \pi_n$ irreducibilis *-reprezentációk. A tétel állítása innen már adódik.

2.11.2 . Definíció. Egy $\mathcal{A}$ C^*-algebrát AF (approximately finite) algebrának nevezünk, ha léteznek olyan $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$, az 1-et tartalmazó véges dimenziós C^*-részalgebrák, melyekre $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ és $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n} = \mathcal{A}$. A szokásoknak megfelelően a továbbiakban élünk az $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C}1$ jelöléssel.

Legyen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ két, az 1-et tartalmazó, véges dimenziós C^*-részalgebrája az $\mathcal{A}$ C^*-algebrának, melyekre $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. A véges dimenziósság miatt kapjuk, hogy

$$\mathcal{A}_1 \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}), \quad \mathcal{A}_2 \cong M_{m_1}(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus M_{m_l}(\mathbb{C}).$$

Az $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ tartalmazás indukál egy

$$\phi : M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}) \to M_{m_1}(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus M_{m_l}(\mathbb{C})$$

injektív *-homomorfizmust, melyre $\phi(1) = 1$. Hogyan írható le ϕ? Meg lehet mutatni, hogy (unitér izomorfiától eltekintve) ϕ hatása minden egyes $M_{n_i}(\mathbb{C})$ tényezőn az, hogy ezen tényezőt a_{ji}-szer "bemásolja" az $M_{m_j}(\mathbb{C})$ algebrák diagonálisaiba "diszjunkt" módon. Továbbá különböző i-kre a hatások úgyszintén "diszjunktak". Az $[a_{ji}]$ $l \times k$-s matrixot a ϕ multiplicitás-matrixának nevezzük. Ennek elemeire fennáll az $[a_{ji}][n_i] = [m_j]$ összefüggés. A könnyebb érthetőség kedvéért lássunk két példát. A $\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$ és $\mathbb{C} \oplus M_3(\mathbb{C}) \oplus M_4(\mathbb{C})$ között a

$$(\lambda, A, B) \longmapsto \left(\lambda, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right)$$

és

$$(\lambda, A, B) \longmapsto \left(\lambda, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right)$$

leképezések egy-egy, az egységelemet megőrző injektív *-homomorfizmust írnak le. Az első esetben a multiplicitás-matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

míg a másodikban

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A fenti leképezések egyszerűen leírhatóak grafikusan is. Írjuk le egy oszlopba az $\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$ egyes tényezőihez tartozó dimenziókat és tegyük meg ugyanezt egy ettől jobbra eső oszlopban a $\mathbb{C} \oplus M_3(\mathbb{C}) \oplus M_4(\mathbb{C})$ tényezőivel. Húzzunk balról jobbra nyilakat annak megfelelően és annyit, ahányszor az egyes tényezők "bemásolása" megtörténik. Így esetünkben az

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \\ 2 \arrow[r] & 3 \\ 2 \arrow[r, Rightarrow] & 4 \end{tikzcd}$$

illetve

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \\ 2 \arrow[dr] & 3 \\ 2 \arrow[r] \arrow[ur] & 4 \end{tikzcd}$$

ábrákat kapjuk.

2.11.3. Definíció. Ha $\mathcal{A}$ egy AF algebra, $(\mathcal{A}_n)$ pedig egy, az 1-et tartalmazó C^*-részalgebráknak a tartalmazásra nézve monoton növekvő sorozata, melynek uniója sűrű $\mathcal{A}$-ban, akkor az egyes $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ tartalmazásokhoz a fentiek szerint tartozó ábrák egymáshoz fűzéséből adódó alakzatot az $\mathcal{A}$ Bratteli-diagramjának nevezzük.

Amint az sejthető, általában egy C^*-algebrának több Bratteli-diagramja is megadható.

2.11.4. Példa. Legyen H szeparábilis végtelen dimenziós Hilbert-tér és tekintsük az $\mathcal{A} = C(H) \oplus \mathbb{C}I$ C^*-algebrát. Válasszunk egy (e_n) teljes ortonormált sorozatot H-ban. Jelölje P_n az $e_1, \ldots, e_n$ által generált altérre való projekciót. Legyen

$$\mathcal{A}_n = P_n C(H) P_n \oplus \mathbb{C}(I - P_n) \cong M_n \oplus \mathbb{C}.$$

Könnyű látni, hogy $\overline{\cup_n \mathcal{A}_n} = \mathcal{A}$. Az $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ tartalmazásnál $M_n(\mathbb{C})$-et egyszer "másolódik" be $M_{n+1}(\mathbb{C})$-be, a $\mathbb{C}$ pedig egyszer $M_{n+1}(\mathbb{C})$-be és ugyancsak egyszer $\mathbb{C}$-be. Így kapjuk $\mathcal{A}$ Bratteli-diagramját:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \\
1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & \\
 & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

2.11.5. Példa. A CAR algebra. Legyen H szeparábilis végtelen dimenziós Hilbert-tér. Legyen $\alpha : H \to B(H)$ olyan lineáris leképezés, melyre

$$\alpha(f)\alpha(g) + \alpha(g)\alpha(f) = 0$$

és

$$\alpha(f)^*\alpha(g) + \alpha(g)\alpha(f)^* = \langle g, f \rangle I$$

teljesül minden $f, g \in H$ esetén. Az α értékkészlete által generált $\mathcal{A}$-val jelölt C^*-algebrát CAR (canonical anticommutation relations) algebrának nevezzük. Meg lehet mutatni, hogy létezik az $\mathcal{A}$ I-t tartalmazó C^*-részalgebráinak egy olyan tartalmazásra nézve monoton növekvő $(\mathcal{A}_n)$ sorozata, melynek uniója sűrű $\mathcal{A}$-ban, $\mathcal{A}_n$ izomorf $M_{2^n}(\mathbb{C})$-vel és az $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ tartalmazások által indukált $\phi_n : M_{2^n}(\mathbb{C}) \to M_{2^{n+1}}(\mathbb{C})$ *-homomorfizmus

$$\phi_n(A) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

alakú. Ezért a CAR algebra Bratteli-diagramja:

$$1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 8 \Longrightarrow 16 \Longrightarrow 32 \Longrightarrow \cdots$$

A ϕ_n értékkészlete benne van az $M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n}(\mathbb{C}) \subset M_{2^{n+1}}(\mathbb{C})$ algebrában. A ϕ_{n+1} hatását vizsgálva kapjuk, hogy

$$\phi_{n+1}\left(\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}.$$

Belátható, hogy az $M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n}(\mathbb{C})$-nek az $\mathcal{A}$-ban megfelelő $\mathcal{B}_n$ C^*-részalgebrákra fennáll, hogy

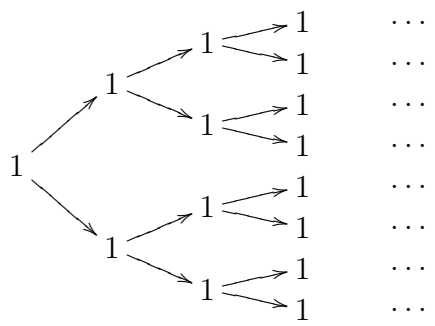
$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{A}_3 \subset \mathcal{B}_3 \subset \dots.$$

Így kapjuk a CAR algebra következő alternatív Bratteli-diagramját:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[r] \arrow[dr] & 4 \arrow[r] \arrow[dr] & 8 \arrow[r] \arrow[dr] & 16 \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \\
1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & \\
 & 1 \arrow[r] \arrow[ur] & 2 \arrow[r] \arrow[ur] & 4 \arrow[r] \arrow[ur] & 8 \arrow[r] \arrow[ur] & 16 \arrow[r] \arrow[ur] & \cdots
\end{tikzcd}$$

2.11.6. Példa. Legyen X kompakt Hausdorff-tér. Ha $C(X)$ AF algebra, akkor mivel a véges dimenziós kommutatív C^*-algebrákat generálják a projekciói, kapjuk, hogy a $C(X)$ projekciói által generált altér sűrű $C(X)$-ben. Ebből adódik, hogy X teljesen széteső (azaz a clopen halmazok bázist alkotnak X-ben). Megfordítva, tegyük fel, hogy $C(X)$ szeparábilis (ez előfeltétele annak, hogy AF lehessen). Ebből következik, hogy X második megszámlálható (azaz van megszámlálható bázisa), amiből Urysohn egy metrizációs tétele szerint kapjuk, hogy X kompakt metrikus tér. Tegyük fel, hogy X teljesen széteső. Ha tekintünk egy clopen halmazokból álló bázist, akkor az egyes halmazok karakterisztikus függvényei olyan projekciók $C(X)$-ben melyek távolsága legalább 1. Mivel $C(X)$ szeparábilitásából adódik ezen projekciók halmazának a szeparábilitása, így a fenti clopen halmazokból álló bázisa X-nek megszámlálható. Innen adódik, hogy $C(X)$-ben megadható megszámlálható sok olyan projekció, melyek által kifeszített altér sűrű, azaz $C(X)$ egy AF algebra.

Konkrét példaként tekintsük a Cantor halmazt, amit most X-szel jelölünk. Legyen X_n a [0,1] intervallum 2^n db $1/3^n$ hosszúságú részintervallumából álló darabja, melyet X konstrukciójának n-edik lépésében kapunk. Jelölje $\mathcal{A}_n$ az $\mathcal{A} = C(X)$ azon részalgebráját melyet azok a függvények alkotnak, amik konstansok X-nek az X_n-et alkotó részintervallumokba eső darabjain. Világos, hogy $\mathcal{A}_n$ izomorf $\mathbb{C}^{2^n}$-nel. Továbbá az $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ tartalmazásnak megfelelő $\phi_n : \mathbb{C}^{2^n} \to \mathbb{C}^{2^{n+1}}$ *-homomorfizmus $\mathbb{C}^{2^n}$ minimális projekcióit $\mathbb{C}^{2^{n+1}}$ két minimális projekciójának összegére bontja. Ezért $C(X)$ Bratteli-diagramja a következő:



2.11.7 . Példa. Egy $\mathcal{A}$ C^*-algebrát UHF (uniformly hyperfinite) algebrának nevezünk, ha létezik az 1-et tartalmazó C^*-részalgebráinak egy olyan, a tartalmazásra nézve monoton növekvő $(\mathcal{A}_n)$ sorozata, melynek uniója sűrű $\mathcal{A}$-ban és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{A}_n$ *-izomorf egy teljes matrixalgebrával. Jelölje ezen teljes matrixalgebrákat $M_{k_n}(\mathbb{C})$. Mivel $M_{k_n}(\mathbb{C})$ és $M_{k_{n+1}}(\mathbb{C})$ között van egy ϕ_n injektív *-homomorfizmus, melyre $\phi_n(I) = I$, így kapjuk, hogy $k_n | k_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Tetszőleges p prímszám esetén legyen

$$\varepsilon_p(\mathcal{A}) = \sup\{l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ : \ p^l | k_n \text{ valamely } n \in \mathbb{N} \text{ esetén } \}.$$

2.11.8 . Tétel. (Glimm) *Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ UHF algebrák pontosan akkor izometrikusan *-izomorfak ha $\varepsilon_p(\mathcal{A}) = \varepsilon_p(\mathcal{B})$ teljesül minden $p \in \mathbb{N}$ prímszám esetén. Minden UHF algebra egyszerű.*

Ha $\mathcal{A}$ egy UHF algebra, akkor a $\delta(\mathcal{A}) = \prod_{p \text{ prime}} p^{\varepsilon_p(\mathcal{A})}$ formális szorzatot az $\mathcal{A}$-hoz tartozó szuperszámnak (supernatural number) szokás nevezni. Meg lehet mutatni, hogy a CAR algebra (izomorfia erejéig) éppen a 2^∞ szuperszámú UHF algebra.

Lássunk most néhány alapvető eredményt általános AF algebrákkal kapcsolatban (a bizonyítások megtalálhatók Davidson [7] könyvének III. Fejezetében).

2.11.9 . Tétel. *Ha két AF algebra ugyanazon Bratteli-diagrammal rendelkezik, akkor ők izmoterikusan *-izomorfak.*

2.11.10 . Tétel. *Egy $\mathcal{A}$ C^*-algebra AF akkor és csak akkor ha*

(i) $\mathcal{A}$ szeparábilis és

(ii) minden $\epsilon > 0$ és $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ esetén létezik egy olyan $\mathcal{B}$ véges dimenziós C^*-részalgebrája $\mathcal{A}$-nak, melyre $\operatorname{dist}(A_i, \mathcal{B}) < \epsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Vegyük észre, hogy véges sok elemmel generált C^*-algebra könnyen lehet végtelen dimenziós.

2.11.11. Tétel. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ AF algebrák. Legyenek $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$ és $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}$ az 1-et tartalmazó C^*-részalgebráknak a tartalmazásra nézve monoton növekvő sorozatai, melyek uniója sűrű $\mathcal{A}$-ban illetve $\mathcal{B}$-ben. Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ *-izomorfak, akkor ugyanez igaz a $\cup_n \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$ és $\cup_n \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}$ *-részalgebrákra is.*

Az alábbi példa mutatja, hogy a fenti állítás megfordítása nem igaz.

2.11.12. Példa. Legyen X a Cantor halmaz és $Y = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Jelölje $\mathcal{A}_n \subset C(X)$ azon függvények összességét, melyek konstansok az X-nek a Cantor halmaz konstrukciója n-edik lépésében kapott 2^n db intervallumba eső részein. Legyen $\mathcal{B}_n \subset C(Y)$ azon függvények halmaza, melyek konstansok $[0, 1/2^n]$-en. Világos, hogy $\mathcal{A}_n \cong \mathbb{C}^{2^n} \cong \mathcal{B}_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Azonban $C(X)$ és $C(Y)$ nem izomorfak, hiszen ha azok lennének, akkor X és Y homeomorf lenne, ami nyilván nem igaz. A $C(Y)$ Bratteli-diagramja a következő:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \\
 & 1 \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & 1 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \\
 & & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] & \cdots \\
 & & 1 \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] \arrow[dddr] & 1 \arrow[r] & \cdots \\
 & & & 1 \arrow[r] & \cdots \\
 & & & 1 \arrow[r] & \cdots \\
 & & & 1 \arrow[r] & \cdots \\
 & & & 1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

2.11.13. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy C^*-algebra és $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ zárt ideál. Ha $\mathcal{I}$ és $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ AF algebrák, akkor $\mathcal{A}$ is az.*

2.12 Csoport C^*-algebrák

2.12.1. Csoportgyűrűk. Legyen G véges csoport, R pedig egy gyűrű. Az $R[G]$ csoportgyűrűn az $f : G \to R$ függvények halmazát értjük a pontonkénti összeadás és a konvolúció műveletével, melyet az

$$(f * g)(t) = \sum_{s \in G} f(s) g(s^{-1}t) \qquad (f, g \in R[G], t \in G)$$

összefüggés definiál. Tegyük fel, hogy R egységelemes. Jelölje a szóbanforgó egységelemet e. Legyen $b_t : G \to R$ azon függvény, melyre $b_t(t) = e$ és $b_t(s) = 0$ ha $s \neq t$. Ekkor ezen

b_t $(t \in G)$ függvények generálják $R[G]$-t abban az értelemben, hogy $R[G]$ minden eleme felírható $\sum_t r_t b_t$ alakban. Világos, hogy $b_t * b_s = b_{ts}$. Innen adódik, hogy $R[G]$ felfogható úgy is, mint az $\sum_t r_t u_t$ alakú, R-beli együtthatókkal képzett formális összegek halmaza, ahol az összeadás a

$$\sum_t r_t u_t + \sum_t r'_t u_t = \sum_t (r_t + r'_t) u_t$$

összefüggéssel, a szorzás pedig a

$$(\sum_t r_t u_t)(\sum_t r'_t u_t) = \sum_t \sum_{ss'=t} (r_s r'_{s'}) u_t$$

egyenlőséggel definiált. Amennyiben R-en adott egy involúció, akkor $R[G]$ is involutívvá tehető. Például, ha $R = \mathbb{C}$, akkor legyen

$$f^*(t) = \overline{f(t^{-1})} \qquad (t \in G, f \in \mathbb{C}[G]).$$

Speciálisan, $b_t^* = b_{t^{-1}}$, tehát b_t unitér minden $t \in G$ estén.

Ha R algebra, akkor természetesen az $R[G]$ csoportgyűrű is az.

2.12.2. Az $L^1(G)$ csoportalgebra. Legyen G lokálisan kompakt csoport. Ekkor G Borel-halmazain létezik olyan μ reguláris mérték, ami invariáns a baloldali eltolásokra, tehát amire $\mu(B) = \mu(tB)$ teljesül minden $B \subset G$ Borel-halmaz és $t \in G$ estén. Ismeretes, hogy μ skalárszorzó erejéig egyértelműen meghatározott. Ezt a mértéket bal Haar mértéknek nevezzük.

Általában a bal Haar mérték nem invariáns a jobboldali eltolásokra. Mindazonáltal létezik olyan $\Delta : G \to \mathbb{R}_+$ folytonos homomorfizmus, melyet moduláris függvénynek nevezünk, amire

$$\mu(Bt) = \Delta(t)\mu(B)$$

teljesül minden $B \subset G$ Borel-halmaz és $t \in G$ estén. A G csoportot unimodulárisnak nevezzük, ha $\Delta \equiv 1$. Unimoduláris csoportra példák a kommutatív, illetve diszkrét, valamint a kompakt csoportok. Be lehet látni, hogy

$$d\mu(t^{-1}) = \Delta(t)^{-1} d\mu(t) \qquad (t \in G).$$

Tekintsük az $L^1(G) = L^1(G, \mu)$ teret. Ekkor $L^1(G)$ Banach algebra a pontonkénti összeadás, skalárral való szorzás, illetve a konvolúció

$$(f * g)(t) = \int_G f(s) g(s^{-1}t) d\mu(s) \qquad (t \in G)$$

műveletével mint szorzással és a

$$f^*(t) = \Delta(t)^{-1}\overline{f(t^{-1})} \qquad (t \in G)$$

módon definiált involúcióval. A norma természetesen a szokásos L^1-norma. Amint az könnyen látható, $L^1(G)$ általában nem C^*-algebra.

Az $L^1(G)$ algebrában létezik 1 normájú szimmetrikus approximatív egység. Válasszunk ugyanis az e egység minden U nyílt környezete esetén egy olyan f_U nemnegatív függvényt, melynek tartója U-ban van és amelyre $f_U^* = f_U$, $\|f_U\| = 1$. Tekintsük az U-k között a fordított tartalmazást mint irányítási relációt. Könnyű belátni, hogy (f_U) approximatív egység. Ha G metrizálható, akkor $L^1(G)$-ben létezik szekvenciális approximatív egység.

2.12.3. Unitér reprezentációk. Legyen G lokálisan kompakt csoport és H Hilbert-tér. Jelölje $U(H)$ a $B(H)$ unitér elemeinek csoportját. A $\tau : G \to U(H)$ homomorfizmust folytonos unitér reprezentációnak nevezzük, ha az $s \mapsto \tau(s)x$ leképezések folytonosak minden $x \in H$ esetén.

Tekintsük az $L^2(G)$ Hilbert-teret és definiáljuk a G bal reguláris reprezentációját $L^2(G)$-n a következőképpen:

$$(\lambda(s)f)(t) = f(s^{-1}t) \qquad (s, t \in G, f \in L^2(G)).$$

Belátható, hogy $\lambda : G \to B(L^2(G))$ egy folytonos unitér reprezentációja G-nek.

2.12.4. A G és az $L^1(G)$ reprezentációi közötti kapcsolat. Legyen $\tau : G \to U(H)$ folytonos unitér reprezentációja G-nek. Ekkor a

$$\pi(f) = \int_G f(s)\tau(s)d\,\mu(s) \qquad (f \in L^1(G))$$

módon definiált $\pi : L^1(G) \to B(H)$ leképezés nemdegenerált *-reprezentációja $L^1(G)$-nek H-n. Itt a fenti integrál a gyenge értelemben érténdő, tehát $\int_G f(s)\tau(s)d\,\mu(s)$ az a $\pi(f)$-fel jelölt operátor, melyre

$$\langle \pi(f)x, y\rangle = \int_G f(s)\langle \tau(s)x, y\rangle d\,\mu(s) \qquad (x, y \in H)).$$

Ezek után a fenti állítás igazolása csupán egyszerű integrálelméleti meggondolásokat igényel. Megfordítva, legyen $\pi : L^1(G) \to B(H)$ nemdegenerált *-reprezentáció. Legyen (ϵ_α) egy 1 normájú szimmetrikus approximatív egység $L^1(G)$-ben. Tetszőleges $f \in L^1(G)$ estén jelölje $f_s(t) = f(s^{-1}t)$. Könnyen belátható, hogy

$$(\epsilon_\alpha)_s * f = (\epsilon_\alpha * f)_s \xrightarrow{\alpha\to\infty} f_s.$$

Hasonlóan a 2.5.7. Tételhez, belátható, hogy involutív Banach algebrának C^*-algebrába történő minden *-homomorfizmusa kontrakció. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\pi((\epsilon_\alpha)_s)\pi(f)x \xrightarrow{\alpha\to\infty} \pi(f_s)x.$$

Mivel π nemdegenerált, így a $\{\pi(f)x : f \in L^1(G), x \in H\}$ rendszer által generált altér sűrű H-ban. A Banach-Steinhaus tétel miatt kapjuk, hogy $(\pi((\epsilon_\alpha)_s))_\alpha$ pontonként konvergens. Legyen

$$\tau(s) = \lim_\alpha \pi((\epsilon_\alpha)_s) \qquad (s \in G) \tag{2.11}$$

ahol a határérték pontonként értendő. Ekkor $\tau : G \to B(H)$. A fentiekből következően

$$\tau(s)\pi(f)x = \pi(f_s)x \qquad (s \in G, f \in L^1(G), x \in H).$$

Innen egyszerűen kapjuk, hogy τ csoporthomomorfizmus és $\tau(1) = I$. A (2.11)-beli pontonkénti konvergenciát, valamint π kontrakció voltát figyelembe véve kapjuk, hogy $\|\tau(s)\| \leq 1$ és $\|\tau(s)^{-1}\| = \|\tau(s^{-1})\| \leq 1$, ahonnan kapjuk, hogy $\tau(s)$ unitér minden $s \in G$ esetén. A τ folytonossága az $s \mapsto f_s$ leképezés folytonosságából[1] és a Banach-Steinhaus tételből következik. Nem nehéz bebizonyítani, hogy a G így kapott unitér reprezentációjához tartozó *-reprezentációja $L^1(G)$-nek éppen az eredeti π-vel jelölt reprezentáció. Ehhez először vegyük észre, hogy rögzített $x, y \in H$ esetén az $f \mapsto \langle \pi(f)x, y\rangle$ leképezés folytonossága miatt van olyan $h \in L^\infty(G)$ függvény, melyre

$$\langle \pi(f)x, y\rangle = \int_G f(s)h(s)d\mu(s) \qquad (f \in L^1(G)).$$

Ekkor

$$\langle \tau(s)\pi(f)x, y\rangle = \langle \pi(f_s)x, y\rangle = \int_G f(s^{-1}t)h(t)d\mu(t).$$

Ezért

$$\int_G f(s)\langle \tau(s)\pi(g)x, y\rangle d\mu(s) = \int_G f(s)\int_G g(s^{-1}t)h(t)d\mu(t)d\mu(s) =$$
$$\int_G\int_G f(s)g(s^{-1}t)h(t)d\mu(s)d\mu(t) = \int_G (f*g)(t)h(t)d\mu(t) =$$
$$\langle \pi(f*g)x, y\rangle = \langle \pi(f)\pi(g)x, y\rangle.$$

Mivel ez teljesül minden $x, y \in H$ és $g \in L^1(G)$ esetén, kapjuk, hogy

$$\pi(f) = \int_G f(s)\tau(s)d\mu(s) \qquad (f \in L^1(G))$$

s ez volt amit bizonyítani kellett.

Az előzőekből adódik, hogy a fent konstruált megfeleltetés G folytonos unitér reprezentációi és az $L^1(G)$ nemdegenerált *-reprezentációi között bijekció.

[1] Ha $f \in L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$, akkor az $s \mapsto f_s$ leképezés folytonos az L^p-normában.

2.12.5. Csoport C^*-algebra. Definiáljunk egy C^*-normát $L^1(G)$-n a következőképpen:

$$\|f\| = \sup\{\|\pi(f)\| \,:\, \pi \text{ nemdegenerált *-reprezentációja } L^1(G)\text{-nek }\}.$$

Könnyen látható, hogy a G bal reguláris reprezentációja által indukált π reprezentációjára $L^1(G)$-nek teljesül, hogy $\langle \pi(f)g, h\rangle = \langle f * g, h\rangle$ $(f \in L^1(G), g, h \in L^2(G))$[2]. Innen következik, hogy tetszőleges $f \neq 0$ esetén van olyan nemdegenerált *-reprezentációja $L^1(G)$-nek, amire $\pi(f) \neq 0$. Tehát a fentiekben definiált $f \mapsto \|f\|$ leképezés valóban C^*-norma $L^1(G)$-n. Természetesen ezzel $L^1(G)$ általában nem teljes, azonban beágyazható egy C^*-algebrába sűrű *-részalgebraként. Ezen C^*-algebrát a G csoport csoport C^*-algebrájának nevezzük és $C^*(G)$-vel jelöljük. Világos, hogy $L^1(G)$ minden nemdegenerált *-reprezentációja kitejeszthető a $C^*(G)$ nemdegenerált *-reprezentációjává, mégpedig egyértelmű módon. A 2.12.4. pontból adódik, hogy kölcsönösen egyértelmű kapcsolat létesíthető a G folytonos unitér reprezentációi és a $C^*(G)$ nemdegenerált *-reprezentációi között. A fenti tulajdonság miatt sokszor nem teszünk különbséget (még jelölésbe sem) a G folytonos unitér reprezentációi és a $C^*(G)$ hozzájuk kapcsolódó nemdegenerált *-reprezentációi között.

2.12.6. Redukált csoport C^*-algebra. Csakúgy mint az előzőekben, legyen G egy lokálisan kompakt csoport a μ bal Haar mértékkel. A $B(L^2(G))$ operátoralgebrának az $\int_G f(s)\lambda(s)d\mu(s)$ $(f \in L^1(G))$ alakú operátorok által generált C^*-részalgebráját a G redukált csoport C^*-algebráján nevezzük $C^*_{red}(G)$-vel jelöljük.

A fentieket figyelembe véve a G bal reguláris reprezentációja, $\lambda : C^*(G) \to C^*_{red}(G)$ *-homomorfizmus. Ezért λ képe egy C^*-algebra, ami tartalmazza a redukált csoport C^*-algebra generátorait. Így λ szürjektív és ezért a redukált csoport C^*-algebra a (teljes) csoport C^*-algebra faktoralgebrájának tekinthető.

2.12.7. Diszkrét csoport redukált csoport C^*-algebrája. Legyen Γ diszkrét csoport. Ekkor a bal Haar mérték éppen a számláló mérték és ezért $L^2(\Gamma) = l^2(\Gamma)$. Könnyen látható, hogy a $C^*_{red}(\Gamma)$ redukált csoport C^*-algebra megegyezik a $\{\lambda(\gamma) \,:\, \gamma \in \Gamma\}$ eltolások által generált C^*-részalgebrájával $B(l^2(\Gamma))$-nek.

Az $l^2(\Gamma)$-nak kanonikus bázisát alkotják a $\{\gamma\}$ $(\gamma \in \Gamma)$ egyelemű halmazok b_γ-val jelölt karakterisztikus függvényei. Jelölje e a Γ egységelemét. Legyen $A \in C^*_{red}(\Gamma)$ és $A(b_e) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma b_\gamma$. Tekintsük $\sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \lambda(\gamma)$ formális összeget. Ez a kanonikus bázis elemein az A-éval megegyező értéket vesz fel. Valóban,

$$(\sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \lambda(\gamma))(b_{\gamma_0}) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \lambda(\gamma) b_{\gamma_0} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma b_{\gamma\gamma_0}.$$

[2] Ha $1 \leq p \leq \infty$, akkor $L^1(G) * L^p(G) \subset L^p(G)$

Ha ρ jelöli a jobb reguláris reprezentációt, azaz $(\rho(t)f)(s) = f(st)$, akkor nyilvánvaló, hogy minden $\rho(t)$ felcserélhető minden $\lambda(s)$-sel. Ezért $\rho(s)$ felcserélhető a redukált csoport C^*-algebra elemivel is. Így kapjuk, hogy

$$A(b_{\gamma_0}) = A(\rho(\gamma_0^{-1})(b_e))) = \rho(\gamma_0^{-1})A(b_e) = \rho(\gamma_0^{-1})\sum_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma b_\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma\rho(\gamma_0^{-1})b_\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma b_{\gamma\gamma_0}.$$

Ezeket figyelembe véve írhatjuk, hogy

$$A = \sum_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma\lambda(\gamma).$$

Ismételten hangsúlyozzuk, hogy a jobboldali összeg konvergenciájáról semmit sem állítunk, azt egy formális összegként fogjuk fel. Jogosan vetődik fel a kérdés, hogy pontosan mely (ξ_γ) komplex skalárrendszerek lépnek fel a $C^*_{red}(\Gamma)$ elemeivel kapcsolatban. Erre a kérdésre kielégítő válasz nem ismeretes, ami nem meglepő, hiszen, amint az belátható, ezen kérdés speciális esetként tartalmazza azon problémát, hogy pontosan mely komplex számsorozatok lépnek fel folytonos függvények Fourier-együtthatóiként.

2.12.8. Véges csoport redukált csoport C^*-algebrája. Legyen Γ véges csoport. Az előző és a 2.12.1. pontokban megállapítottakból következik, hogy ekkor $C^*_{red}(\Gamma)$ izomorf a $\mathbb{C}[\Gamma]$ csoportalgebrával. Azt állítjuk, hogy bijektív kapcsolat létesíthető a Γ csoport unitér reprezentációi és a $C^*_{red}(\Gamma)$ redukált csoport C^*-algebra nemdegenerált *-reprezentációi között. Valóban, ha $\tau : \Gamma \to U(H)$ unitér reprezentáció, akkor a

$$\pi : \sum_\gamma \xi_\gamma\lambda(\gamma) \longmapsto \sum_\gamma \xi_\gamma\tau(\gamma)$$

leképezésről könnyen belátható, hogy az I-t I-be képező *-reprezentáció. A jóldefiniáltsághoz megjegyezzük, hogy ha $\sum_\gamma \xi_\gamma\lambda(\gamma) = 0$, akkor

$$0 = (\sum_\gamma \xi_\gamma\lambda(\gamma))b_e = \sum_\gamma \xi_\gamma b_\gamma,$$

ahonnan $\xi_\gamma = 0$ adódik minden $\gamma \in \Gamma$ esetén. Megfordítva, ha $\pi : C^*_{red}(\Gamma) \to B(H)$ nemdegenerált *-reprezentáció, akkor a $\tau(\gamma) = \pi(\lambda(\gamma))$ $(\gamma \in \Gamma)$ módon definiált függvény unitér reprezentációja Γ-nak, amihez a fentiek szerint tartozó *-reprezentáció éppen az eredeti π. Véges csoportok esetén tehát a redukált csoport C^*-algebra rendelkezik a teljes csoport C^*-algebra azon tulajdonságával, hogy az alapul vett csoport unitér reprezentációi és csoport C^*-algebra nemdegenerált *-reprezentáció között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat létesíthető. Ezen tulajdonság nem meglepő a következők miatt. A 2.12.6. pontban láttuk, hogy a bal reguláris reprezentáció egy *-homomorfizmusa $C^*(G)$-nek $C^*_{red}(G)$-re.

Ha azonban az alapul vett csoport véges, akkor $L^1(G)$ véges dimenziós, s így zárt $C^*(G)$-ben. Másrészt azonban $L^1(G)$ sűrű is $C^*(G)$-ben, tehát kapjuk, hogy $L^1(G) = C^*(G)$. A 2.12.5. pont elején láttuk, hogy $L^1(G)$-n a bal reguláris reprezentáció injektív. Ezért a $\lambda : C^*(\Gamma) \to C^*_{red}(\Gamma)$ leképezés *-izomorfizmus.

2.12.9. Tétel. $C^*(\mathbb{Z}) \simeq C^*_{red}(\mathbb{Z}) \simeq C(\mathbb{T})$.

Bizonyítás. Tekintsük $\mathbb{Z}$ (bal) reguláris reprezentációját $l^2(\mathbb{Z})$-n. Ekkor $\lambda(n)(\xi_m) = (\xi_{m-n})$ minden $(\xi_m) \in l^2(\mathbb{Z})$ esetén. Legyen b_n a $\{n\}$ karakterisztikus függvénye $\mathbb{Z}$-n tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén. Ekkor könnyen látható, hogy $\lambda(n)\xi = b_n * \xi$ $(\xi \in l^2(\mathbb{Z}))$. Tudjuk, hogy $l^2(\mathbb{Z})$ a Fourier-transzformáción keresztül izometrikusan izomorf $L^2(\mathbb{T}) = L^2[0, 2\pi]$-vel. Legyen $e_n(t) = e^{int}$ $(t \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{Z})$. Mivel $e_n f$ Fourier-együtthatóira $\widehat{(e_n f)}(m) = \hat{f}(m-n)$, így

$$(\mathcal{F}^{-1} \circ \lambda(n) \circ \mathcal{F})f = e_n f =: M_{e_n}(f)$$

minden $f \in L^2(\mathbb{T})$ esetén, ahol $\mathcal{F}$ jelöli a Fourier-transzformációt. Innen kapjuk, hogy $\mathbb{Z}$ redukált csoport C^*-algebrája izomorf az

$$\{\sum_n \xi_n M_{e_n} \ : \ (\xi_n) \in l^1(\mathbb{Z})\}$$

halmaz által generált C^*-részalgebrájával $B(L^2(\mathbb{T}))$-nek. Mivel a $g \mapsto M_g$ leképezés izometrikus izomorfizmusa $C(\mathbb{T})$-nek $B(L^2(\mathbb{T}))$-be, így a fenti halmaz éppen az abszolút konvergens Fourier-sorú folytonos függvényekkel való szorzásoperátorok összessége. Ezért a $\mathbb{Z}$ redukált csoport C^*-algebrája izometrikusan izomorf az abszolút konvergens Fourier-sorú folytonos függvényeknek által $C(\mathbb{T})$-ben generált C^*-részalgebrával. Mivel ez tartalmazza a trigonometrikus polinomokat, így Fejér tétele miatt kapjuk, hogy a $C(\mathbb{T})$ szóbanforgó C^*-részalgebrája maga a $C(\mathbb{T})$. Ezért $C^*_{red}(\mathbb{Z}) \simeq C(\mathbb{T})$.

A fentiekből látjuk, hogy a bal reguláris reprezentáció $l^1(\mathbb{Z})$-en ekvivalens a $g \mapsto M_g$ leképezéssel az abszolút konvergens Fourier-sorú folytonos függvények terén. Mivel ez izometria, így $l^1(\mathbb{Z})$-n megadható egy olyan C^*-norma, melyre vonatkozóan a bal reguláris reprezentáció izometria. Azonban $L^1(G)$ minden *-reprezentációja kontrakció. Így kapjuk, hogy az előbbi C^*-algebra norma éppen a csoport C^*-algebra normájával egyezik meg $l^1(\mathbb{Z})$-n. Ezért a (bal) reguláris reprezentáció izometrikus $C^*(\mathbb{Z})$-n, ahonnan adódik, hogy $\lambda : C^*(\mathbb{Z}) \to C^*_{red}(\mathbb{Z})$ *-izomorfizmus. A bizonyítás evvel teljes.

A fenti állítás igaz tetszőleges kommutatív lokálisan kompakt csoportra is. Legyen G egy ilyen csoport. G karakterein a G-nek $\mathbb{T}$-be történő folytonos homomorfizmusait értjük. A karakterek csoportját ellátva a kompakt halmazokon egyenletes konvergencia topológiájával kapjuk a G duális csoportját, amit $\hat{G}$-vel jelölünk. Ezek után kimondható az alábbi tétel.

2.12.10. Tétel. *Ha G lokálisan kompakt kommutatív csoport, akkor $C^*(G) \simeq C^*_{red}(G) \simeq C_0(\hat{G})$.*

2.12.11. Amenábilitás. Legyen G lokálisan kompakt csoport a μ bal Haar mértékkel. G-t amenábilisnek nevezzük ha $L^\infty(G)$-n létezik bal invariáns közép, azaz olyan $m : L^\infty(G) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál, amelyre

(i) $m(f) \geq 0$ ha $f \geq 0$;

(ii) $m(1) = 1$;

(iii) $m(\lambda(t)f) = m(f) \quad (f \in L^\infty(G), t \in G)$.

Ha G kompakt csoport, akkor $L^\infty(G) \subset L^1(G)$, s ezért G amenábilis. Ismert, hogy a kommutatív lokálisan kompakt csoportok is amenábilisek. Legyen Γ diszkrét csoport. Ha Γ amenábilis, akkor Γ minden részcsoportja és faktorcsoportja amenábilis. Ha $H \subset \Gamma$ normálosztó és H, Γ/H amenábilisek, akkor Γ is az.

Nem amenábilis csoportra fontos példa a szabad csoport. Jelölje $\mathbb{F}_2$ a két generátoros szabad csoportot. Belátjuk, hogy ez nem amenábilis. Legyen u, v a két generátor. Jelölje U_0 azon redukált alakú elemeket, melyek u-nak páros hatványával (beleértve a 0-dik hatványt is, tehát esetleg v-vel) kezdődnek. Legyen U_1 azon elemek halmaza, melyek u páratlan hatványával kezdődnek. Hasonlóan, jelölje V_0, V_1, V_2 azon elemeket, amelyek v-nek 3-mal osztva 0, 1 illetve 2 maradékot adó hatványával kezdődnek. Világos, hogy U_0, U_1 és V_0, V_1, V_2 egy-egy felosztása $\mathbb{F}_2$-nek. Mivel ezek rendre megkaphatók egymásból eltolással, így

$$m(\chi_{U_1}) = 1/2, \quad m(\chi_{V_0}) = 1/3,$$

ahol m egy feltételezett bal invariáns közép. Azonban $U_1 \subset V_0$, amiből m monotonitása miatt ellentmondáshoz jutunk.

Az amenábilitásnak a csoport C^*-algebrák elméletében játszott szerepét mutatja az alábbi mély eredmény.

2.12.12. Tétel. *Legyen G lokálisan kompakt csoport. Ekkor a bal reguláris reprezentáció pontosan akkor *-izomorfizmusa $C^*(G)$-nek $C^*_{red}(G)$-re ha G amenábilis.*

2.12.13. A szabad csoport csoport C^*-algebrája. A $C^*(\mathbb{F}_2)$ csoport C^*-algebrára ismertek a következők. Létezik hűséges (azaz injektív) irreducibilis *-reprezentációja és az ilyen reprezentációk értékkészletében nincs nemzérus kompakt operátor. Továbbá $C^*(\mathbb{F}_2)$-ben nincs nemtriviális projekció.

Ami a $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ redukált csoport C^*-algebrát illeti, egy fontos eredmény szerint ez

egyszerű C^*-algebra. Ennek következményeként kapjuk a következőket. A szabad csoportnak, mivel véges sok generátora van, így van véges dimenziós reprezentációja. Ebből következik, hogy $C^*(\mathbb{F}_2)$-nek van véges dimenziós nemdegenerált *-reprezentációja. Tegyük fel, hogy $C^*(\mathbb{F}) \simeq C^*_{red}(\mathbb{F})$. Kapjuk, hogy $\mathbb{F}$ redukált csoport C^*-algebrájának is van véges dimenziós nemdegenerált *-reprezentációja, ami $C^*_{red}(\mathbb{F})$ egyszerűsége miatt szükségképpen injektív. Innen következik, hogy $C^*_{red}(\mathbb{F})$ és ezért $C^*(\mathbb{F})$ is véges dimenziós. Mivel azonban $L^1(\mathbb{F}) \subset C^*(\mathbb{F})$, adódik, hogy az $L^1(\mathbb{F})$ csoportalgebra is véges dimenziós, ami ellentmondásban áll a szabad csoport végtelen voltával. Ezért a $C^*(\mathbb{F}_2)$ és $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ C^*-algebrák nem *-izomorfak (tehát nemcsak a bal reguláris reprezentáció nem *-izomorfizmus, hanem egyáltalán nem létezik közöttük *-izomorfizmus). Végezetül, belátható, hogy a $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ redukált csoport C^*-algebrában sincsen nemtriviális projekció.

3 Neumann-algebrák

3.1 A gyenge és az erős operátortopológia

3.1.1. Definíció. Legyen H Hilbert-tér. Az

$$A \longmapsto |\langle Ax, y\rangle| \qquad (x, y \in H)$$

illetve az

$$A \longmapsto \|Ax\| \qquad (x \in H)$$

elválasztó szeminorma-rendszerek által $B(H)$-n generált vektortopológiákat rendre gyenge illetve erős operátortopológiának nevezzük.

3.1.2. Megjegyzés. Világos, hogy a gyenge operátortopológia durvább az erős operátortopológiánál, ami viszont durvább az operátornorma topológiájánál. Könnyű megmutatni, hogy végtelen dimenziós H Hilbert-tér esetén az előbbi topológiák egymástól különböznek. Valóban, ha S jelöli a H szeparábilis végtelen dimenziós Hilbert-tér egy unilaterális eltolását, akkor S^n tart 0-hoz a gyenge operátortopológiában, azonban ez nem áll az erős operátortopológiára vonatkozóan. Ha (e_n) egy teljes ortonormált rendszer H-ban és P_n jelöli az $e_1, \ldots, e_n$ rendszer által generált altérre való ortogonális projekciót, akkor $P_n \to I$ az erős operátortopológiában, de ez nem igaz a normatopológiára vonatkozóan.

A továbbiakban, ha nem áll fenn a félreértés veszélye, operátorok alkotta térrel kapcsolatban gyenge topológián mindig a gyenge operátortopológiát, erős topológián pedig mindig az erős operátortopológiát értjük.

3.1.3. Tétel. *Legyen f egy lineáris funkcionál $B(H)$-n. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) f gyengén folytonos;

(ii) f erősen folytonos;

(iii) léteznek olyan $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in H$ vektorok, hogy

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} \langle Ax_k, y_k\rangle \qquad (A \in B(H)).$$

B i z o n y í t á s. A $(iii) \Longrightarrow (i) \Longrightarrow (ii)$ implikációk világosak.

Tegyük most fel, hogy f erősen folytonos. Ekkor léteznek olyan $x_1, \dots x_n \in H$ vektorok, melyekre

$$\|Ax_i\| \leq 1, \dots \|Ax_n\| \leq 1 \Longrightarrow |f(A)| \leq K$$

valamilyan K konstanssal. Ebből könnyen adódik, hogy

$$|f(A)| \leq K \max_i \|Ax_i\| \leq K(\sum_k \|Ax_k\|^2)^{1/2}$$

teljesül minden $A \in B(H)$ esetén. Ez azt jelenti, hogy az

$$(Ax_1, \dots Ax_n) \longmapsto f(A)$$

módon definiált hozzárendelés egy korlátos lineáris funkcionál a H^n egy alterén. A Riesz-féle reprezentációs tétel miatt léteznek olyan $y_1, \dots, y_n \in H$ vektorok, melyekre

$$f(A) = \langle (Ax_1, \dots Ax_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_k \langle Ax_k, y_k \rangle.$$

A bizonyítás ezzel teljes.

3.1.4. Következmény. *A $B(H)$ minden konvex részhalmazának gyenge és erős lezártja megegyezik.*

B i z o n y í t á s. A Hahn-Banach-tétel elválasztási alakjából azonnal adódik.

3.1.5. Tétel. *$B(H)$ egységgömbje kompakt a gyenge operátortopológiában.*

B i z o n y í t á s. Tekintsük $B(H)$ egységgömbjének $A \longmapsto (\langle Ax, y \rangle)_{x,y \in H}$ leképezését a $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\|y\|\}$ halmazok szorzatába, ahol $x, y \in H$. Világos, hogy ez egy homeomorf beágyazása $B(H)$ gyenge topológiával ellátott egységgömbjének a fenti szorzattérbe, ami kompakt terek szorzata lévén kompakt. Így elég megmutatni, hogy a beágyazásnál adódó kép zárt halmaz. Ez azonban könnyű feladat: Ha $A_\alpha \in B(H)$, $\|A_\alpha\| \leq 1$ olyan nett, melyre $(\langle A_\alpha x, y \rangle)_\alpha$ minden $x, y \in H$ esetén konvergens, akkor a

$$B(x, y) = \lim_\alpha \langle A_\alpha x, y \rangle \qquad (x, y \in H)$$

módon definiált sesquilineáris forma korlátos és normája kisebb-egyenlő mint 1. Ezért létezik olyan $A \in B(H)$, $\|A\| \leq 1$ operátor, melyre

$$\langle Ax, y \rangle = B(x, y) = \lim_\alpha \langle A_\alpha x, y \rangle \qquad (x, y \in H).$$

Így beágyazásunk képtere valóban zárt, s a bizonyítás ezzel teljes.

3.1.6. Tétel. *Ha H szeparábilis Hilbert-tér, akkor $B(H)$ egységgömbjén a gyenge és erős operátortopológia metrizálható.*

B i z o n y í t á s. Legyen (x_n) megszámlálható sűrű részhalmaza H-nak. Nem nehéz belátni, hogy a

$$d_w(A,B) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{|\langle (A-B)x_n, x_n\rangle|}{1+|\langle (A-B)x_n, x_n\rangle|}$$

illetve a

$$d_s(A,B) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{\|(A-B)x_n\|}{1+\|(A-B)x_n\|} \qquad (A,B \in B(H))$$

módon definiált metrikák $B(H)$ egységgömbjén éppen a gyenge, illetve az erős operátortopológiát szolgáltatják.

3.1.7. Tétel. *Ha H szeparábilis Hilbert-tér, akkor $B(H)$ szeparábilis a gyenge, illetve az erős operátortopológiában.*

B i z o n y í t á s. Lássuk például az erős operátortopológiára vonatkozó állítást. (A másik esetben a bizonyítás teljesen hasonló.)

Ha $A \in B(H)$, akkor A tetszőleges erős környezetében van véges rangú operátor. Ennek valós és képzetes része felírható $\sum_k \lambda_k x_k \otimes x_k$ alakban, ahol $\lambda_k \in \mathbb{R}$ és az x_k-k egymásra merőleges egységvektorok. Ezen operátorok viszont még az operátornormában is approximálhatók egy előre adott $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ sűrű vektorhalmaz elemeiből képzett $\sum_k r_k \varphi_k \otimes \varphi_k$ összegekkel, ahol minden r_k racionális. Mivel az ilyen összegek halmazának számossága megszámlálható, a bizonyítás teljes.

3.1.8. Megjegyzés. A fenti állítással kapcsolatban megjegyezzük, hogy hasonló állítás nem igaz az operátornorma topológiájával kapcsolatban. Valóban, ha H végtelen dimenziós és tekintjük rajta az egy fix teljes ortonormált sorozatra vonatkozóan diagonális operátorok terét az operátornorma topológiájával, akkor ez izometrikusan izomorf az l_∞ térrel, ami nem szeparábilis.

3.1.9. Megjegyzés. Világos, hogy az összeadás és a skalárral való szorzás műveletei folytonosak a gyenge illetve az erős operátortopológiára vonatkozóan. Mi a helyzet a másik két ugyancsak fontos művelettel, a szorzással és az involúcióval?

Ami a szorzást illeti, az nem folytonos egyik topológiára vonatkozóan sem. Valóban, ha H végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér az (e_n) teljes ortonormált rendszerrel és S az ehhez kapcsolódó unilaterális eltolás, akkor $S^n, S^{*n} \to 0$ gyengén, de $S^{*n}S^n = I$ $(n \in \mathbb{N})$. Ami az erős operátortopológiát illeti, megmutatható, hogy 0 eleme a $\{\sqrt{n}e_n : n \in \mathbb{N}\}$

halmaz gyenge (vektor)topológiára vonatkozó lezártjának. Legyen most $(n_\lambda)_\lambda$ természetes számoknak egy olyan nettje, melyre $(\sqrt{n}_\lambda e_{n_\lambda})_\lambda$ gyengén konvergál 0-hoz és legyen

$$A_\lambda = \sqrt{n}_\lambda e_{n_\lambda} \otimes e_{n_\lambda} \qquad (x \in H).$$

Ekkor belátható, hogy $A_\lambda \to 0$ erősen, de $(A_\lambda^2)_\lambda$ nem konvergál erősen 0-hoz. Igaz azonban, hogy a $B(H)$ korlátos részhalmazain erősen folytonos a szorzás művelete. Ez egyszerűen adódik a következő algebrai azonosságból:

$$A_\alpha B_\alpha - AB = A_\alpha(B_\alpha - B) + (A_\alpha - A)B.$$

Térjünk most rá az involúció esetére. Könnyen látható, hogy ez gyengén folytonos. Ami azonban az erős folytonosságot illeti, ha H végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér, akkor $S^{*n} \to 0$ erősen, de $(S^n)_n$ nem konvergál erősen 0-hoz.

3.1.10. Tétel. *Ha H Hilbert-tér, akkor az involúció erősen folytonos a normális operátorok halmazán.*

Bizonyítás. Az állítás azonnal adódik az alábbi egyenlőtlenségből. Ha $A_\alpha, A \in B(H)$ normális operátorok, akkor

$$\|A_\alpha^* x - A^* x\|^2 = \|A_\alpha x\|^2 + \|Ax\|^2 - \langle A_\alpha^* x, A^* x\rangle - \langle A^* x, A_\alpha^* x\rangle \leq$$

$$\|A_\alpha x\|^2 - \|Ax\|^2 + \langle A^* x, A^* x\rangle - \langle A_\alpha^* x, A^* x\rangle + \langle A^* x, A^* x\rangle - \langle A^* x, A_\alpha^* x\rangle =$$

$$\|A_\alpha x\|^2 - \|Ax\|^2 + \langle x, (A - A_\alpha)A^* x\rangle + \langle (A - A_\alpha)A^* x, x\rangle \leq$$

$$\|A_\alpha x\|^2 - \|Ax\|^2 + 2\|x\|\|(A - A_\alpha)A^* x\|.$$

3.2 A Neumann-féle második kommutáns tétel és a Kaplansky-féle sűrűségi tétel

3.2.1. Definíció. Ha $\mathcal{A}$ algebra és $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, akkor $\mathcal{C}$ kommutánsán a

$$\mathcal{C}' = \{A \in \mathcal{A} \,:\, AC = CA \ \ (\forall C \in \mathcal{C})\}$$

halmazt értjük.

3.2.2. Tétel. (Neumann-féle második kommutáns tétel). *Legyen $\mathcal{A} \subset B(H)$ egy, az identikus operátort tartalmazó *-részalgebra. Ekkor*

(i) $\mathcal{A}$ *erősen sűrű* $\mathcal{A}''$*-ban;*

(ii) $\mathcal{A}$ *gyengén sűrű* $\mathcal{A}''$*-ban.*

Ezért az alábbi állítások ekvivalensek:

(1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$*;*

(2) $\mathcal{A}$ *erősen zárt;*

(3) $\mathcal{A}$ *gyengén zárt.*

B i z o n y í t á s. Mivel $\mathcal{A}$ erős és gyenge lezártja megegyezik (3.1.4. Következmény), ezért elegendő (i)-et bizonyítani.

Legyen $T \in \mathcal{A}''$ és $x \in H$ rögzített. Jelölje $K = \overline{\{Ax : A \in \mathcal{A}\}}$. Ekkor $K \subset H$ olyan zárt altér, ami invariáns altere $\mathcal{A}$ minden elemének. Ha P jelöli a K-ra való ortogonális projekció operátorát, akkor $PAP = AP$ és $PA^*P = A^*P$ minden $A \in \mathcal{A}$ esetén. Az utóbbi egyenlőségben adjungáltat véve kapjuk, hogy $PA = AP$ $(A \in \mathcal{A})$. Ezért $P \in \mathcal{A}'$, amiből $TP = PT$ következik. Mivel $x \in K$, így $Tx = TPx = PTx \in K$, tehát létezik olyan (A_k) sorozat $\mathcal{A}$-ban, hogy $Tx = \lim_{n\to\infty} A_n x$.

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén tekintsük a

$$\varphi : B(H) \to B(H^n), \quad A \longmapsto \begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix}$$

módon definiált *-homomorfizmust. Ennek értékkészlete egy, az identitást tartalmazó *-részalgebrája $B(H^n)$-nek. Egyszerű számolás mutatja, hogy $\varphi(T) \in \varphi(\mathcal{A})''$. Legyen most $x = (x_1, ..., x_n) \in H^n$ tetszőleges. A már bizonyítottak miatt létezik olyan (A_k) sorozat $\mathcal{A}$-ban, hogy

$$Tx_i = \lim_{k\to\infty} A_k x_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Ebből következik, hogy T benne van $\mathcal{A}$ erős lezártjában.

Mivel $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$ és $\mathcal{A}''$ zárt az erős operátortopológiában, ezért $\mathcal{A}$ erős lezártja része $\mathcal{A}''$-nak. Végezetül kapjuk, hogy $\mathcal{A}''$ megegyezik $\mathcal{A}$ erős lezártjával.

3.2.3. Definíció. Ha $\mathcal{A} \subset B(H)$ egy, az I-t tartalmazó *-részalgebra, ami zárt a gyenge (illetve erős) operátortopológiára vonatkozóan, akkor $\mathcal{A}$-t Neumann-algebrának nevezzük.

3.2.4. Következmény. *Ha* $\mathcal{A} \subset B(H)$ *egy, az* I*-t tartalmazó *-részalgebra, akkor az* $\mathcal{A}$ *által generált Neumann-algebra (azaz az* $\mathcal{A}$*-t tartalmazó Neumann-algebrák metszete) megegyezik az* $\mathcal{A}$ *erős (gyenge) lezártjával, azaz* $\mathcal{A}''$*-val.*

B i z o n y í t á s. A Neumann-féle második kommutáns tétel miatt $\mathcal{A}$ erős (gyenge) lezártja $\mathcal{A}''$, ami egy Neumann-algebra. Így az $\mathcal{A}$ által generált Neumann-algebra része az $\mathcal{A}$ erős (gyenge) lezártjának. A másik irányú tartalmazás nyilvánvaló.

3.2.5 . Tétel. *Legyen $\mathcal{A} \subset B(H)$ Neumann-algebra és $A \in \mathcal{A}$. Ekkor $\mathcal{A}$ tartalmazza*

(i) A poláris felbontásának tényezőit;

(ii) az A értékkészletének lezártjára történő ortogonális projekciót;

(iii) az A magjára történő ortogonális projekciót.

B i z o n y í t á s. Az (i) bizonyításához legyen $A = U|A|$ az A poláris felbontása és $V \in \mathcal{A}'$ unitér operátor. Megmutatjuk, hogy $V^*UV = U$, azaz $VU = UV$. Mivel V^*UV nyilvánvalóan parciális izometria, ehhez a poláris felbontás egyértelműsége (lásd 2.4.18. Tétel) miatt azt kell belátni, hogy $A = V^*UV|A|$ és $\ker V^*UV = \ker A$. Mivel V felcserélhető A-val és V normális operátor, így Fuglede tétele miatt (2.4.12. Tétel) V felcserélhető A^*-gal is. Innen kapjuk, hogy $V|A|^2 = |A|^2V$, ahonnan $V|A| = |A|V$ következik (a gyökfüggvény korlátos intervallumon egyenletes approximálható polinomokkal, így $|A|$ megegyezik $|A|^2$ bizonyos polinomjai sorozatának az operátornormában vett határértékével). Ezért

$$V^*UV|A| = V^*U|A|V = V^*AV = V^*VA = A.$$

A $\ker V^*UV = \ker A$ összefüggés az alábbi ekvivalenciákból következik:

$$V^*UVx = 0 \Leftrightarrow UVx = 0 \Leftrightarrow AVx = 0 \Leftrightarrow VAx = 0 \Leftrightarrow Ax = 0.$$

Ezért $V^*UV = U$, azaz $UV = VU$. Tehát, U felcserélhető az $\mathcal{A}'$ minden unitér elemével. Mivel $\mathcal{A}'$ egységelemes C^*-algebra, ezért megegyezik unitér elemeinek lineáris burkával (2.1.7. Tétel). Innen következik, hogy U felcserélhető $\mathcal{A}'$ minden elemével, azaz $U \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$. Végezetül kapjuk, hogy $|A| = U^*A \in \mathcal{A}$.

A (ii) állításhoz legyen P az A értékkészletének lezártjára való ortogonális projekció. Mivel

$$\overline{\operatorname{rng} A} = (\ker A^*)^\perp = (\ker |A^*|)^\perp = \overline{\operatorname{rng} |A^*|},$$

így az $|A^*| \in \mathcal{A}$ poláris felbontása éppen $P|A^*| = |A^*|$. Innen kapjuk, hogy $P \in \mathcal{A}$.

Mivel $\ker A = (\operatorname{rng} A^*)^\perp$, így ha P jelöli a $\ker A$-ra való ortogonális projekciót, akkor (ii) miatt $I - P \in \mathcal{A}$, ahonnan kapjuk, hogy $P \in \mathcal{A}$.

3.2.6 . Tétel. *Legyen $\mathcal{A} \subset B(H)$ Neumann-algebra. Ekkor*

(i) $\mathcal{A}$ *megegyezik a benne lévő projekciók által generált (az operátornorma topológiájában) zárt altérrel;*

(ii) ha $N \in \mathcal{A}$ *normális operátor* E *spektrálmértékkel és* f *korlátos Borel-függvény az* N *spektrumán, akkor* $\int_{\sigma(N)} f\,dE \in \mathcal{A}$.

B i z o n y í t á s. Lássuk be először (ii)-t. Mivel $\mathcal{A}'$ tetszőleges eleme felcserélhető N-nel, így a spektráltétel (2.5.10. Tétel) miatt ezen elemek mind felcserélhetők E-vel is. Innen adódik, hogy minden Borel-halmaz spektrálmértéke eleme $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$-nak. Innen integrálközelítő összegek vételével kapjuk a (ii) állítást.

Az (i)-ben szereplő állítás a (ii) egyszerű következménye. Valóban, ha $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges, akkor $\operatorname{Re} A \in \mathcal{A}$ és $\operatorname{Im} A \in \mathcal{A}$ az (i) miatt megapproximálhatók $\mathcal{A}$-beli projekciók lineáris kombinációjával.

3.2.7. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ folytonos függvényt erősen folytonosnak nevezzük, ha önadjungált operátorok tetszőleges (A_α) nettjére és tetszőleges $A \in B(H)$ önadjungált operátorra, ha $A_\alpha \to A$ erősen, akkor $f(A_\alpha) \to f(A)$ erősen.

3.2.8. Tétel. *Minden* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *korlátos folytonos függvény erősen folytonos.*

B i z o n y í t á s. Jelölje $\mathcal{F}$ azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ folytonos függvények halmazát, melyek erősen folytonosak. A folytonos függvénykalkulus tulajdonságai miatt világos, hogy $\mathcal{F}$ vektortér, továbbá ha $f, g \in \mathcal{F}$ és valamelyikük egyik korlátos, akkor $fg \in \mathcal{F}$.

Először megmutatjuk, hogy $C_0(\mathbb{R})$ (a végtelenben eltűnő, $\mathbb{R}$-en értelmezett folytonos függvények tere) része $\mathcal{F}$-nek. Ehhez legyen $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cap C_0(\mathbb{R})$. Könnyű belátni, hogy $\mathcal{F}_0$ egy zárt részalgebrája $C_0(\mathbb{R})$-nek. A 3.1.10. Tételből adódik, hogy ezen részalgebra zárt a konjugálás műveletére nézve. Legyen most

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad g(t) = \frac{t}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $f, g \in C_0(\mathbb{R})$ és $\|f\|, \|g\| \leq 1$. Megmutatjuk, hogy $f, g \in \mathcal{A}_0$. Ha $A_\alpha, A \in B(H)$ önadjungált operátorok, akkor

$$\|(g(A) - g(A_\alpha))x\| = \|(1 + A_\alpha^2)^{-1}[(1 + A_\alpha^2)A - A_\alpha(1 + A^2)](1 + A^2)^{-1}x\| =$$

$$\|(1 + A_\alpha^2)^{-1}[A - A_\alpha - A_\alpha(A - A_\alpha)A](1 + A^2)^{-1}x\| \leq$$

$$\|(1 + A_\alpha^2)^{-1}\|\|(A - A_\alpha)(1 + A^2)^{-1}x\| + \|(1 + A_\alpha^2)^{-1}A_\alpha\|(A - A_\alpha)A(1 + A^2)^{-1}x\| \leq$$

$$\|(A - A_\alpha)(1 + A^2)^{-1}x\| + \|(A - A_\alpha)A(1 + A^2)^{-1}x\|.$$

Ezért $g \in \mathcal{F}_0$, s így $f(t) = 1 - tg(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ miatt $f \in \mathcal{F}_0$ szintén igaz. Az $\{f, g\}$ halmaz szeparáló, ezért a Stone-Weierstrass-tétel miatt kapjuk, hogy $\mathcal{F}_0 = C_0(\mathbb{R})$. Ezért $C_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$.

Végezetül, legyen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tetszőleges korlátos folytonos függvény. Ekkor $h(t) = h(t)f(t) + h(t)tg(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ felhasználásával a már bizonyítottak alapján kapjuk, hogy $h \in \mathcal{A}$.

3.2.9. Tétel. (Kaplansky-féle sűrűségi tétel). *Legyen H Hilbert-tér, $\mathcal{A} \subset B(H)$ egy, az identikus operátort tartalmazó C^*-részalgebra, melynek erős lezártját jelölje $\mathcal{B}$. Ekkor*

(i) Az $\mathcal{A}$ önadjungált elemeinek $\mathcal{A}_{sa}$ halmaza erősen sűrű $\mathcal{B}_{sa}$-ban;

(ii) $\mathcal{A}_{sa}$ zárt egységgömbje erősen sűrű $\mathcal{B}_{sa}$ zárt egységgömbjében;

(iii) $\mathcal{A}$ zárt egységgömbje erősen sűrű $\mathcal{B}$ zárt egységgömbjében;

(iv) $\mathcal{A}$ unitér elemeinek halmaza erősen sűrű $\mathcal{B}$ unitér elemeinek a halmazában.

Bizonyítás. Ha $B \in \mathcal{B}_{sa}$, akkor létezik $\mathcal{A}$ elemeinek egy olyan $(A_\lambda)_\lambda$ nettje, hogy $A_\lambda \longrightarrow B$ erősen. Ekkor $A_\lambda, A_\lambda^* \longrightarrow B$ gyengén, s így

$$\frac{1}{2}(A_\lambda + A_\lambda^*) \longrightarrow B \quad \text{gyengén.}$$

Ezért B benne van $\mathcal{A}_{sa}$ gyenge lezártjában, ami azonban a konvexitás miatt megegyezik ennek erős lezártjával (3.1.4. Következmény). Innen kapjuk az (i)-et.

A (ii)-höz legyen B a $\mathcal{B}_{sa}$ egységgömbjének eleme. Az (i) miatt ekkor létezik $\mathcal{A}_{sa}$ elemeinek egy B-hez erősen konvergáló $(A_\lambda)_\lambda$ nettje. Legyen

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{ha } |t| \leq 1 \\ \frac{1}{t} & \text{ha } |t| > 1. \end{cases}$$

Ekkor f korlátos folytonos függvény lévén erősen folytonos. Tekintsük az $(f(A_\lambda))_\lambda$ nettet. Mivel $\mathcal{A}$ zárt az operátornorma topológiájára nézve, így ezen nett elemei $\mathcal{A}$-beli, 1-nél kisebb vagy egyenlő normájú, önadjungált operátorok és $f(A_\lambda) \to f(B) = B$ erősen. Innek kapjuk a (ii) állítást.

A (iii)-hoz tekintsük az $M_2(B(H)) = B(H \oplus H)$ operátoralgebrát. Könnyen látszik, hogy

$$\begin{pmatrix} A_\lambda & B_\lambda \\ C_\lambda & D_\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

az erős operátortopológiában akkor és csak akkor ha az erős konvergencia fennáll a megfelelő komponensekre vonatkozóan. Mivel, amint az könnyen látható,

$$\|A\|, \|B\|, \|C\|, \|D\| \leq \left\| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right\| \leq \|A\| + \|B\| + \|C\| + \|D\|,$$

így adódik, hogy

$$M_2(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \, : \, A, B, C, D \in \mathcal{A} \right\}$$

az identikus operátort tartalmazó C^*-részalgebra, melynek erős lezártja éppen $M_2(\mathcal{B})$. Ha B eleme $\mathcal{B}$ egységgömbjének, akkor a

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$$

önadjungált operátor eleme az $M_2(\mathcal{B})_{sa}$ egységgömbjének, s így (ii) miatt benne van $M_2(\mathcal{A})_{sa}$ egységgömbjének erős lezártjában. A (iii) állítás ezek után már nyilvánvaló.

A (iv) állításhoz (i) miatt elegendő belátni, hogy ha $U \in \mathcal{B}$ unitér, akkor van olyan $B \in \mathcal{B}$ önadjungált operátor, hogy $U = \exp(iB)$. Valóban, ekkor ugyanis választva egy olyan (A_λ) nettet $\mathcal{A}_{sa}$-ban, melyre $A_\lambda \longrightarrow B$ erősen, a $t \mapsto \exp(it)$ függvény erősen folytonos voltából kapjuk az állítást. Azonban a 3.2.4. Következmény miatt $\mathcal{B}$ Neumann-algebra. altér $B(H)$-ban. Mivel B az U korlátos Borel-függvénye (lásd 2.5.14. Tétel bizonyítását), a 3.2.6. Tétel (ii) pontja miatt adódik, hogy $B \in \mathcal{B}$. A bizonyítás ezzel teljes.

3.2.10. Tétel. *Legyen $\mathcal{A} \subset B(H)$ egy, az I-t tartalmazó *-részalgebra. Ekkor $\mathcal{A}$ pontosan akkor topológikusan irreduciblis ha $\mathcal{A}' = \mathbb{C}I$ ami azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{A}'' = B(H)$.*

B i z o n y í t á s. Könnyű látni, hogy $\mathcal{A}$ pontosan akkor topológikusan irreducibilis, ha minden $\mathcal{A}'$-beli projekció 0 vagy I. Mivel $\mathcal{A}'$ Neumann-algebra, így a 3.2.6. Tétel (i) pontja miatt ez avval ekvivalens, hogy $\mathcal{A}' = \mathbb{C}I$. Tegyük most fel, hogy $\mathcal{A}' = \mathbb{C}I$. Ekkor világos, hogy $\mathcal{A}'' = B(H)$. Tetszőleges $\mathcal{A}$ estén $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'''$. Ez a Neumann-féle második kommutáns tételből és abból következik, hogy $\mathcal{A}'$ Neumann-algebra. Ha most $\mathcal{A}'' = B(H)$, akkor a fenti $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'''$ összefüggés miatt kapjuk, hogy $\mathcal{A}' = B(H)' = \mathbb{C}I$.

3.2.11. Következmény. *Legyen $\mathcal{A} \subset B(H)$ egy, az identikus operátort tartalmazó *-részalgebra. Az $\mathcal{A}$ pontosan akkor topológikusan irreduciblis ha erősen (gyengén) sűrű $B(H)$-ban.*

B i z o n y í t á s. Az $\mathcal{A}$ pontosan akkor topológikusan irreducibilis, ha $\mathcal{A}'' = B(H)$. A Neumann-féle második kommutáns tétel miatt pedig $\mathcal{A}$ erős (vagy gyenge) lezártja éppen $\mathcal{A}''$.

A Kaplansky-féle sűrűségi tétel alkalmazásaként belátjuk a Kadison tranzitivitási tételét (2.7.13. Tétel). Ehhes szükségünk lesz az alábbi lemmára.

3.2.12 . Lemma. *Legyen $x_1, ..., x_n$ ortonormált vektorrendszer a H Hilbert-térben. Legyen $y_1, ..., y_n \in H$ olyan, hogy $\|y_i\| \leq r$ $(i = 1, ..., n)$. Ekkor létezik olyan $B \in B(H)$, melyre $Bx_i = y_i$ minden $i = 1, ..., n$ esetén és $\|B\| \leq (2n)^{1/2}r$. Ha van olyan A önadjungált operátor, hogy $Ax_i = y_i$, akkor a fenti B is választható önadjungáltnak.*

B i z o n y í t á s. Az állítás első részéhez legyen $B = \sum_i y_i \otimes x_i$. Ekkor $Bx_i = y_i$ és

$$\|Bx\| = \|\sum_i \langle x, x_i\rangle y_i\| \leq \sum_i |\langle x, x_i\rangle| r \leq$$
$$r\big(\sum_i |\langle x, x_i\rangle|^2\big)^{1/2}\big(\sum_i 1^2\big)^{1/2} \leq r\|x\|\sqrt{n}.$$

A második részhez legyen A olyan önadjungált operátor, melyre $Ax_i = y_i$ minden i indexre. Jelölje P az $\{x_1, ..., x_n\}$ által generált altérre való ortogonális projekció operátora. A fenti B operátorra fennáll, hogy $B = AP$. Tekintsük most a $C = AP + PA - PAP$ önadjungált operátort. Könnyű látni, hogy $Cx_i = y_i$. Továbbá,

$$\|C\|^2 = \|C^2\| = \|PA^2P + APA - PAPAP\| \leq$$
$$\|B^*B\| + \|APA - (PAP)^*(PAP)\| \leq \|B\|^2 + \|(PA)^*(PA)\| =$$
$$\|B\|^2 + \|BB^*\| \leq r^2n + r^2n,$$

ahol az utolsó előtti egyenlőtlenségnél felhasználtuk a $(PAP)^*(PAP)$ operátor pozitivitását. A bizonyítás ezzel teljes.

3.2.13 . Tétel. (Kadison-féle tranzitivitási tétel). *Legyen $\mathcal{A} \subset B(H)$ az identikus operátort tartalmazó topológikusan irreducibilis C^*-részalgebra. Ha $x_1, ..., x_n$ egy független vektorrendszer H-ban és $y_1, ..., y_n \in H$, akkor létezik olyan $A \in \mathcal{A}$, melyre $Ax_i = y_i$ teljesül minden $i = 1, ..., n$ esetén. Ha van olyan $B \in B(H)$ önadjungált operátor, hogy $Bx_i = y_i$, akkor A is választható önadjungáltnak.*

B i z o n y í t á s. A Gram-Schmidt-féle ortogonalizálási eljárás miatt feltehető, hogy az x_i-k ortonormált vektorok. Legyen $B_0 \in B(H)$ olyan, hogy $B_0x_i = y_i$. Mivel $\mathcal{A}$ erős lezártja megegyezik $\mathcal{A}''$-vel, ami az irreducibilitás miatt éppen $B(H)$, így létezik $A_0 \in \mathcal{A}$ úgy, hogy $\|y_i - A_0x_i\| = \|B_0x_i - A_0x_i\| \leq [2(2n)^{1/2}]^{-1}$ minden i esetén. A 3.2.12. Lemma

miatt van olyan $B_1 \in B(H)$ operátor, melyre $B_1 x_i = B_0 x_i - A_0 x_i$ és $\|B_1\| \leq 1/2$. Vegyük észre, hogy ha B_0 válsztható önadjungáltnak, akkor a Kaplansky-féle sűrűségi tétel miatt A_0-ról is feltehető ugyanez. Ebből adódóan B_1 is vehető önadjungáltnak. Ugyancsak a Kaplansky-tétel következménye, hogy létezik olyan $A_1 \in \mathcal{A}$ operátor (önadjungált, ha B_1 önadjungált), melyre $\|B_1 x_i - A_1 x_i\| \leq [4(2n)^{1/2}]^{-1}$ és $\|A_1\| \leq 1/2$.

Hasonló eljárást követve olyan (B_n) és (A_n) operátorsorozatot kapunk, melyre

$$\|B_n\|, \|A_n\| \leq 2^{-n},$$
$$B_n x_i = y_i - A_0 x_i - .... - A_{n-1} x_i$$

és az B_n, A_n operátorok önadjungáltak, ha B_0 önadjungált. Legyen most $A \in \mathcal{A}$ a $\sum_n A_n$ operátornormában konvergens sor összege. Világos, hogy $Ax_i = y_i$ és A önadjungált, ha B_0 is az.

3.2.14. Következmény. *Legyen $\mathcal{A} \subset B(H)$ egy, az identikus operátort tartalmazó C^*-részalgebra. Ekkor $\mathcal{A}$ pontosan akkor topológikusan irreducibilis ha algebrailag irreducibilis.*

B i z o n y í t á s. A tranzitivitási tétel miatt triviális.

3.3 Az $\mathbb{L}^\infty$-függvénykalkulus

3.3.1. Lemma. *Legyen $\mathcal{A} \subset B(H)$ egy, az I-t tartalmazó *-részalgebra. Ekkor $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A}$ maximális kommutatív Neumann-algebra.*

B i z o n y í t á s. Ha $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, akkor $\mathcal{A}$ kommutatív gyengén (erősen) zárt *-részalgebrája $B(H)$-nak, tehát $\mathcal{A}$ kommutatív Neumann-algebra. Ha $\mathcal{B} \subset B(H)$ olyan kommutatív Neumann-algebra, melyre $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, akkor a kommutativitás miatt $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{A}' = \mathcal{A}$. Ezért $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Tehát $\mathcal{A}$ maximális kommutatív Neumann-algebra.

Megfordítva, legyen $\mathcal{A}$ maximális kommutatív Neumann-algebra. A kommutativitás miatt $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Ha $T \in \mathcal{A}'$ önadjungált, akkor az $\mathcal{A}$ és T által generált Neumann-algebra (ami a 3.2.4. Következmény miatt megegyezik az $\mathcal{A}$ és T által generált *-algebra erős (gyenge) lezártjával) kommutatív. Ezért $\mathcal{A}$ maximalitása miatt $T \in \mathcal{A}$. Mivel $\mathcal{A}'$ *-algebra, így az előzőek miatt kapjuk, hogy $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Ezért $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

3.3.2. Tétel. *Legyen μ véges mérték egy mérhető téren. Ekkor az*

$$f \longmapsto M_f, \quad M_f g = fg \quad (g \in \mathbb{L}^2(\mu))$$

*leképezés izometrikus *-izomorfizmusa $\mathbb{L}^\infty(\mu)$-nek a $B(\mathbb{L}^2(\mu))$ egy maximális kommutatív Neumann-algebrájára.*

B i z o n y í t á s. Azt, hogy a fenti leképezés injektív *-homomorfizmus, egyszerű számolás mutatja. Mivel C^*-algebrák közötti *-homomorfizmus pontosan akkor izometrikus, ha injektív, kapjuk, hogy transzformációnk izometrikus. Az állítás visszamaradó részéhez a 3.3.1. Lemma miatt elegendő megmutatni, hogy $\{M_f : f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)\} = \{M_f : f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)\}'$. Legyen $T \in B(\mathbb{L}^2(\mu))$ olyan, hogy $TM_f = M_f T$ $(f \in \mathbb{L}^\infty(\mu))$. Jelölje $\mathcal{S}$ az egyszerű mérhető függvények összességét és tekintsük a

$$\Phi(g) = \langle Tg, 1\rangle \qquad (g \in \mathcal{S})$$

módon definiált lineáris funkcionált. Adott $g \in \mathcal{S}$ esetén legyen $h \in \mathcal{S}$ olyan 1 abszolút értékű függvény, melyre $g = h|g|$. Ekkor

$$|\Phi(g)| = |\langle T(|g|^{1/2}h|g|^{1/2}), 1\rangle| = |\langle |g|^{1/2}T(h|g|^{1/2}), 1\rangle| = |\langle T(h|g|^{1/2}), |g|^{1/2}\rangle| \leq$$

$$\|T(h|g|^{1/2})\|_2 \||g|^{1/2}\|_2 \leq \|T\|\||g|^{1/2}\|_2^2 = \|T\|\|g\|_1.$$

Ezen becslés miatt Φ kiterjeszthető $\mathbb{L}^1(\mu)$-re folytonos lineáris funkcionállá. Az ilyen funkcionálok alakja azonban ismert. Nevezetesen, létezik olyan $f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)$ függvény, hogy

$$\Phi(g) = \int fg d\,\mu \qquad (g \in \mathcal{S}).$$

Speciálisan, ha $g_1, g_2 \in \mathcal{S}$, akkor

$$\langle M_f g_1, g_2\rangle = \int f g_1 \overline{g_2} d\,\mu = \Phi(g_1\overline{g_2}) = \langle T(\overline{g_2}g_1), 1\rangle = \langle \overline{g_2}Tg_1, 1\rangle = \langle Tg_1, g_2\rangle,$$

ahonnan kapjuk, hogy $M_f = T$. Ezzel beláttuk, hogy

$$\{M_f : f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)\}' \subset \{M_f : f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)\}.$$

Mivel a másik irányú tartalmazás a kommutativitás miatt világos, a bizonyítás teljes.

3.3.3. Tétel. *Legyen X kompakt Hausdorff-tér μ pedig véges reguláris Borel-mérték X-en. Ekkor $\{M_\varphi : \varphi \in C(X)\}$ sűrű $\{M_f : f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)\}$-ben az erős (gyenge) operátortopológiára nézve.*

B i z o n y í t á s. Az előző tétel bizonyításához hasonlóan járhatunk el. Legyen $T \in \{M_\varphi : \varphi \in C(X)\}'$. Az egyszerű mérhető függvények helyett az $\mathbb{L}^1(\mu)$-ben ugyancsak sűrű $C(X)$ függvénytér elemeit tekintve, a fenti bizonyítást követve kapjuk, hogy valamely $f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)$ függvényre

$$\langle M_f g_1, g_2\rangle = \Phi(g_1\overline{g_2}) = \langle T(\overline{g_2}g_1), 1\rangle = \langle \overline{g_2}Tg_1, 1\rangle = \langle Tg_1, g_2\rangle$$

teljesül minden $g_1, g_2 \in C(X)$ függvény esetén. Mivel $C(X)$ sűrű az $\mathbb{L}^2(\mu)$ térben is, ezért kapjuk, hogy $M_f = T$. Ezzel beláttuk, hogy

$$\{M_f \,:\, f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)\}' \subset \{M_\varphi \,:\, \varphi \in C(X)\}' \subset \{M_f \,:\, f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)\}.$$

A 3.3.2. Tételt felhasználva kapjuk, hogy $\{M_\varphi \,:\, \varphi \in C(X)\}' = \{M_f \,:\, f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)\}$. Mindkét oldal kommutánsát véve adódik, hogy

$$\{M_\varphi \,:\, \varphi \in C(X)\}'' = \{M_f \,:\, f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)\}' = \{M_f \,:\, f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)\}.$$

Ezek után a Neumann-féle második kommutáns tételből adódik az állítás.

3.3.4 . Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy a fenti tételben szereplő sűrűség általában nem áll fenn az operátornorma topológiájában (ez ugyanis azt jelentené, hogy $C(X)$ sűrű az $\mathbb{L}^\infty(\mu)$-ben, ami általában nem igaz), továbbá, hogy a fenti állításra közvetlen mértékelméleti bizonyítás is adható.

3.3.5 . Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ a H Hilbert-tér korlátos lineáris operátorainak egy algebrája. Az $x \in H$ vektort az $\mathcal{A}$ ciklikus vektorának nevezzük, ha az $\mathcal{A}x$ altér sűrű H-ban. Az $y \in H$ vektort az $\mathcal{A}$ szeparáló vektorának nevezzük, ha tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén $Ay = 0$-ból $A = 0$ következik.

3.3.6 . Megjegyzés. Általában nincs semmilyen kapcsolat vektorok ciklikussága és szeparáló volta között. Legyen ugyanis H egy legalább 2-dimenziós Hilbert-tér. Ha $\mathcal{A} = \mathbb{C}I$ és $x \neq 0$, akkor x szeparáló vektora $\mathcal{A}$-nak de x nem ciklikus vektor. Ha pedig $\mathcal{A} = B(H)$ és $x \neq 0$, akkor x ciklikus vektora $\mathcal{A}$-nak, de ő nem szeparáló vektor.

Mindazonáltal, ha $\mathcal{A}$ operátorok egy kommutatív algebrája, akkor $\mathcal{A}$ minden ciklikus vektora egyben szeparáló is. Valóban, ha x ciklikus vektor, és $Tx = 0$ valamely $T \in \mathcal{A}$ esetén, akkor minden $A \in \mathcal{A}$-ra fennáll, hogy $TAx = ATx = 0$. Mivel x ciklikus vektor volt, így T eltűnik a H egy sűrű alterén, amiből $T = 0$ következik.

3.3.7 . Definíció. Ha A korlátos lineáris operátor a H Hilbert-téren, akkor az A által generált Neumann-algebrán az A-t tartalmazó Neumann-algebrák metszetét értjük. Jelölése $W^*(A)$.

3.3.8 . Megjegyzés. Ha $N \in B(H)$ normális operátor, akkor

$$W^*(N) = \{N\}''.$$

Valóban, Fuglede tétele miatt (2.4.12. Tétel) $\{N\}'$ *-algebra, tehát $\{N\}''$ egy olyan Neumann-algebra, ami tartalmazza N-et. Ha $\mathcal{A} \subset B(H)$ egy olyan Neumann-algebra, melyre $N \in \mathcal{A}$, akkor Neumann második kommutáns tétele miatt $\{N\}'' \subset \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$. Innen kapjuk az állítást. Másrészt $W^*(N)$ megegyezik az N, N^* polinomjai által alkotott kommutatív *-algebra erős (gyenge) lezártjával, így $W^*(N)$ kommutatív Neumann-algebra.

3.3.9 . Tétel. *Legyen N normális operátor a H Hilbert-téren és tegyük fel, hogy az általa generált Neumann-algebrának, $W^*(N)$-nek van ciklikus vektora. Ekkor létezik olyan μ véges Borel-mérték $\sigma(N)$-en, melynél minden nemüres nyílt halmaz mértéke pozitív és $U : H \to \mathbb{L}^2(\mu)$ unitér operátor úgy, hogy az*

$$f(N) = U^{-1} M_f U \qquad (f \in \mathbb{L}^\infty(\mu))$$

*módon adott $f \mapsto f(N)$ leképezés izometrikus *-izomorfizmus $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ és $W^*(N)$ között, ami a folytonos függvénykalkulus kiterjesztése.*

B i z o n y í t á s. Jelölje $\Phi : C(\sigma(N)) \to C^*(N)$ a folytonos függvénykalkulust és legyen $x \in H$ az $W^*(N)$ egy ciklikus vektora. Legyen

$$F(f) = \langle \Phi(f)x, x\rangle \qquad (f \in C(\sigma(N))).$$

Ekkor F pozitív lineáris funkcionál $C(\sigma(N))$-en, amihez a Riesz-féle reprezentációs tétel értelmében tartozó (pozitív) reguláris Borel-mérték legyen μ. Ha $V \subset \sigma(N)$ nemüres nyílt halmaz, akkor az Uryson-lemma miatt van olyan $f : \sigma(N) \to [0,1]$ folytonos nem azonosan 0 függvény, ami eltűnik a V komplementumán. Tegyük fel, hogy $\mu(V) = 0$. Ekkor f^2-nek a μ-szerinti integrálja 0, és így azt kapjuk, hogy

$$0 = F(f^2) = \langle \phi(f)\phi(f)x, x\rangle = \langle \Phi(f)x, \Phi(f)x\rangle,$$

amiből $\Phi(f)x = 0$ következik. Mivel $C^*(N)$ erősen sűrű $W^*(N)$-ben, ezért x ciklikus vektora $C^*(N)$-nek is. A kommutativitás miatt x ciklikusságából adódik annak szeparáló volta. Ezért $\Phi(f) = 0$ azaz $f = 0$ adódik, ami ellentmondás. Tehát nemüres nyílt halmaz μ-szerinti mértéke pozitív.

Tekintsük most a

$$\Phi(f)x \longmapsto f$$

leképezést. Az x vektor szeparáló volta miatt ez egy jól-definiált lineáris leképezése $C^*(N)x \subset H$-nak $C(X) \subset \mathbb{L}^2(\mu)$-re. Könnyen látható, hogy ezen leképezés normatartó. Valóban,

$$\|\phi(f)x\|^2 = \langle \phi(f)x, \phi(f)x\rangle = \langle \phi(f)^*\phi(f)x, x\rangle =$$
$$\langle \phi(|f|^2)x, x\rangle = F(|f|^2) = \int |f|^2 d\,\mu = \|f\|_2^2.$$

Mivel $C^*(N)x \subset H$ és $C(X) \subset \mathbb{L}^2(\mu)$ sűrű aleterek, ezért ezen leképezés egyértelmű módon terjeszthető ki $U : H \to \mathbb{L}^2(\mu)$ unitér operátorrá. Legyen most $f \in C(\sigma(N))$. Mivel

$$M_f U\Phi(g)x = M_f g = fg = U\Phi(fg)x = U\Phi(f)\Phi(g)x$$

teljesül minden $g \in C(\sigma(N))$ esetén, ezért x ciklikussága folytán kapjuk, hogy $M_f U = U\Phi(f)$, azaz

$$\Phi(f) = U^{-1} M_f U = f(N)$$

minden folytonos f esetén. Ezen összefüggésből adódik, hogy

$$\{M_f \,:\, f \in C(\sigma(N))\} = UC^*(N)U^{-1}.$$

Mindkét oldal erős (gyenge) lezártját véve a 3.3.3. Tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\{M_f \,:\, f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)\} = UW^*(N)U^{-1}.$$

Innen következik, hogy a tételben szereplő leképezés izometrikus *-izomorfizmus $\mathbb{L}^\infty(\mu)$-ről $W^*(N)$-re. A bizonyítás ezzel teljes.

3.3.10. Megjegyzés. Az előző tétel alapján, abban az esetben, ha a $W^*(N)$-nek van ciklikus vektora, akkor a folytonos függvénykalkulus kiterjeszthető egy alkalmas tulajdonságokkal bíró úgynevezett $\mathbb{L}^\infty$-függvénykalkulussá. Ezek után a kérdés az, hogy vajon minden esetben van-e ciklikus vektor?

Az világos, hogy mivel $W^*(N)$ az N, N^* polinomjai által alkotott *-részalgebra erős lezártja, így ha $W^*(N)$-nek van ciklikus vektora, akkor H szükségképpen szeparábilis. Az azonban még a szeparábilis esetben sem igaz, hogy minden $W^*(N)$-nek van ciklikus vektora. Ehhez legegyszerűb példának tekintsük az identikus operátort. (Megmutatható, hogy ha N egy szeparábilis téren értelmezett normális operátor, akkor abban az esetben ha $W^*(N)$-nek van ciklikus vektora, N szükségképpen multiplicitásmentes, azaz minden sajátértéke 1 multiplicitású.) Tehát ciklikus vektor nem minden esetben létezik. Sokkal szerencsésebb a helyzet a szeparáló vektorokkal, amint azt a következő állítás mutatja.

3.3.11. Lemma. *Legyen H szeparábilis Hilbert-tér, $\mathcal{A} \subset B(H)$ az identikus operátort tartalmazó kommutatív *-részalgebra. Ekkor $\mathcal{A}$-nak van szeparáló vektora.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{R}$ olyan $\{\overline{\mathcal{A}x} \,:\, \|x\| = 1,\, x \in M \subset H\}$ rendszerek halmaza, melyek elemei páronként ortogonálisak. Könnyű látni, hogy $\mathcal{R}$ a tartalmazással mint parciális rendezéssel egy olyan halmaz, melyben minden lánc felülről korlátos, s ezért alkalmazható rá a Zorn-lemma. Ezért $\mathcal{R}$-nak van maximális eleme. Mivel $\mathcal{A}$ *-részalgebra, könnyen következik, hogy ezen maximális elem olyan, hogy a benne szereplő zárt alterek (Hilbert-féle) direktösszege éppen H. Egyébként ugyanis ezen direktösszeg ortogonális komplementeréből választva egy y egységvektort és az $\overline{\mathcal{A}y}$ alteret tekintve ellentmondásba kerülnénk rendszerünk maximalitásával. A H szeparábilitása és $x \in \overline{\mathcal{A}x}$ miatt adódik, hogy a maximális rendszerünkhöz tartozó x-ek számossága megszámlálható. Ezért létezik olyan

$\{x_1, x_2, ...\}$ ortonormált vektorrendszer, melyre az $\overline{\mathcal{A}x_n}$ alterek páronként ortogonálisak és direktösszegük H. Tekintsük az

$$x = \sum_n \frac{1}{n} x_n$$

vektort. Legyen $T \in \mathcal{A}$. Ha $Tx = 0$, akkor $\sum_n \frac{1}{n} T x_n = 0$, ahonnan a tagok ortogonalitása miatt következik, hogy $Tx_n = 0$ minden n-re. Innen kapjuk, hogy $TAx_n = ATx_n = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ és $A \in \mathcal{A}$ esetén. Ebből adódik, hogy T zérus alterek egy olyan rendszerén melyek lezártjainak direktösszege H. Ebből pedig az következik, hogy $T = 0$. Tehát x szeparáló vektora $\mathcal{A}$-nak.

A következő lemma azt mutatja, hogy a $B(H)$ tetszőleges olyan C^*-részalgebrája, aminek van szeparáló vektora, izomorf egy kisebb Hilbert-téren értelmezett C^*-részalgebrával, aminek már van ciklikus vektora.

3.3.12. Lemma. *Legyen $\mathcal{A} \subset B(H)$ egy, az identikus operátort tartalmazó C^*-részalgebra. Legyen x szeparáló vektora $\mathcal{A}$-nak és jelölje H_0 az $\mathcal{A}x$ lezártját. Ekkor az*

$$A \longmapsto A|H_0$$

*leképezés izometrikus *-izomorfizmusa $\mathcal{A}$-nak $B(H_0)$-ba. Továbbá $\sigma(A) = \sigma(A|H_0)$ minden $A \in \mathcal{A}$ esetén.*

B i z o n y í t á s. Világos, hogy H_0 invariáns altere minden $A \in \mathcal{A}$ operátornak. Ezek után könnyen belátható, hogy a fenti leképezés *-homomorfizmus. Így a normatartáshoz a 2.5.7. Tétel miatt elegendő megmutatni, hogy transzformációnk injektív. Ez viszont azonnal következik x szeparáló voltából. Végezetül, mivel az előzőek miatt $\mathcal{A}|H_0 := \{A|H_0 : A \in \mathcal{A}\} \subset B(H_0)$ egy, az identitást tartalmazó C^*-részalgebra így a 2.3.3. Tétel miatt

$$\sigma(A) = \sigma_{\mathcal{A}}(A) = \sigma_{\mathcal{A}|H_0}(A|H_0) = \sigma_{B(H_0)}(A|H_0).$$

Szakaszunk fő tételének bizonyításához szükségünk lesz az alábbi eredményre.

3.3.13. Tétel. *Neumann-algebra egységgömbje kompakt a gyenge operátortopológiára nézve.*

B i z o n y í t á s. Hasonlóan járunk el mint a 3.1.5. Tétel bizonyításában. Tekintsük az

$$A \longmapsto (\langle Ax, y\rangle)_{(x,y)\in H\times H}$$

leképezését $\mathcal{A}$ egységgömbjének a $\prod_{(x,y)\in H\times H}\{z\in\mathbb{C} : |z|\le\|x\|\|y\|\}$ szorzattérbe. Ha $\mathcal{A}$ egységgömbjén a gyenge operátortopológiát tekintjük, akkor ezen leképezés egy homeomorfizmusa $\mathcal{A}$ egységgömbjének a fenti szorzattérbe, ami a Tyihonov-féle kompaktsági tétel miatt kompakt. Így csak azt kell belátnunk, hogy leképezésünk értékkészlete zárt. Ehhez legyen (A_α) egy nett $\mathcal{A}$ egységgömbjében, melyre $(\langle A_\alpha x, y\rangle)$ konvergens minden $x, y\in H$ esetén. Ekkor minden $x, y\in H$ vektorhoz létezik olyan $B(x, y)$ komplex szám, melyre

$$\langle A_\alpha x, y\rangle \longrightarrow B(x, y).$$

Könnyen látszik, hogy B sesquilineáris forma, melynek normája nem nagyobb mint 1. Ezért létezik olyan A korlátos lineáris operátor, hogy $\|A\|\le 1$ és $B(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ teljesül minden $x, y\in H$ esetén. Világos, hogy (A_α) gyengén konvergál A-hoz. Mivel $\mathcal{A}$ Neumann-algebra, ezért $A\in\mathcal{A}$, amiből kapjuk a kívánt zártsági tulajdonságot. A bizonyítás ezzel teljes.

Az alábbi tételünkben megmutatjuk, hogy szeparábilis téren értelmezett teszőleges normális operátor esetén megadható alkalmas $\mathbb{L}^\infty$-függvénykalkulus.

3.3.14. Tétel. *Legyen N normális operátor a H szeparábilis Hilbert-téren. Ekkor létezik olyan μ véges Borel-mérték $\sigma(N)$-en, melynél nemüres nyílt halmaz mértéke pozitív és olyan izometrikus *-izomorfizmus $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ és $W^*(N)$ között, ami kiterjesztése a folytonos függvénykalkulusnak.*

Bizonyítás. Célunk az állítás visszavezetése a ciklikus esetre (3.3.9. Tétel). Legyen x a $W^*(N)$ szeparáló vektora (3.3.11. Lemma) és jelölje H_0 a $W^*(N)x$ lezártját. Legyen

$$\Lambda : A \longmapsto A|H_0,$$

ami a 3.3.12. Lemma miatt izometrikus *-izomorfizmusa $W^*(N)$-nek $B(H_0)$-ba.

Megmutatjuk, hogy Λ képterére: $W^*(N)|H_0 = W^*(N|H_0)$. Mivel $W^*(N)$ megegyezik a $C^*(N)$ erős lezártjával, így $\overline{C^*(N)x} = \overline{W^*(N)x} = H_0$. Így a 3.3.12. Lemma miatt $C^*(N)|H_0$ kommutatív C^*-algebra, melynek $I|H_0$ és $N|H_0$ eleme. Ezért $C^*(N|H_0)\subset C^*(N)|H_0$. Másrészt, mivel tetszőleges $p(z,\bar z)$ polinomra $p(N, N^*)|H_0\in C^*(N|H_0)$, így kapjuk, hogy $C^*(N)|H_0\subset C^*(N|H_0)$. Összefoglalva, $C^*(N)|H_0 = C^*(N|H_0)$. Ebből következik, hogy $W^*(N)|H_0\subset W^*(N|H_0)$. Ha $T\in(W^*(N|H_0))_1$ ($_1$ a megfelelő tér egységgömbjét jelöli), akkor a Kaplansky-féle sűrűségi tétel miatt létezik $(C^*(N|H_0))_1 = (C^*(N)|H_0)_1$-ben olyan nett, ami erősen konvergál T-hez. Mivel ez a nett szükségképpen benne van $(W^*(N)|H_0)_1$-ben, így adódik, hogy $W^*(N)|H_0$ egységgömbje erősen sűrű $W^*(N|H_0)$ egységgömbjében. Azonban Λ gyengén folytonos és $(W^*(N))_1$ gyengén kompakt (3.3.13. Tétel). Ezért $W^*(N)_1|H_0 = (W^*(N)|H_0)_1$ (Λ izometria) is

gyengén kompakt, azaz gyengén zárt $B(H_0)$-ban, s ezért $(W^*(N|H_0))_1$-ben is. Ebből következik, hogy $W^*(N)|H_0$ és $W^*(N|H_0)$ egységgömbjei megegyeznek, ahonnan kapjuk, hogy $W^*(N)|H_0 = W^*(N|H_0)$.

Ezek után világos, hogy az x ciklikus vektora a $W^*(N|H_0)$ algebrának. Alkalmazható tehát a 3.3.9. Tétel, ami szerint létezik olyan μ reguláris Borel-mérték $N|H_0$ spektrumán, azaz $\sigma(N)$-en (3.3.12. Lemma), melynél nemüres nyílt halmaz mértéke pozitív, és van olyan izometrikus *-izomorfizmus $\mathbb{L}^\infty(\mu)$-ról $W^*(N)|H_0$-ra ami a folytonos függvénykalkulus kiterjesztése. Szorozzuk meg ezen leképezést balról a fent szereplő Λ inverzével. Világos, hogy ez egy izometrikus *-izomorfizmusa $\mathbb{L}^\infty(\mu)$-nek $W^*(N)$-re. Könnyű látni, hogy ha $p(z,\bar{z})$ tetszőleges polinom, akkor $p(z,\bar{z})$ ezen leképezés szerinti képe éppen $p(N,N^*)$. Innen a Stone-Weierstrass-tétel miatt adódik a tétel utolsó állítása.

3.4 Kommutatív Neumann-algebrák

3.4.1. Lemma. *Legyen X komplex vektortér és $Q : X \to \mathbb{C}$ kvadratikus alak (azaz olyan függvény, hogy $Q(\lambda x) = |\lambda|^2 Q(x)$ teljesül minden $\lambda \in \mathbb{C}$ és $x \in X$ esetén). Pontosan akkor létezik olyan $B : X \times X \to \mathbb{C}$ sesquilineáris forma, melyre $Q(x) = B(x,x)$ $(x \in X)$, ha Q eleget tesz a paralelogramma egyenlőségnek, azaz ha*

$$Q(x+y) + Q(x-y) = 2Q(x) + 2Q(y) \qquad (x, y \in X).$$

3.4.2. Tétel. *Legyen $\mathcal{A} \subset B(H)$ kommutatív Neumann-algebra. Ekkor $\mathcal{A}$ struktúratere Stone-tér, azaz olyan kompakt Hausdorff-tér, melyben minden nyílt halmaz lezártja nyílt.*

Bizonyítás. Legyen $U \subset \hat{\mathcal{A}}$ nyílt halmaz. Jelölje $\mathcal{F}$ azon $f : \hat{\mathcal{A}} \to [0,1]$ folytonos függvények osztályát, melyek eltűnnek U-n. Világos, hogy $\mathcal{F}$ a szokásos pontonkénti rendezésre nézve irányított halmaz (azaz olyan parciálisan rendezett halmaz, melyben bármely két elemnnél van nagyobb-egyenlő elem). Azt állítjuk, hogy $\mathcal{F}$-nek van pontos felső korlátja $C(\hat{\mathcal{A}})$-ban. Valóban, tekintsük $\mathcal{F}$ elemeinek a Gelfand-transzformáció révén megfelelő $\mathcal{A}$-beli A pozitív operátorokat. Ekkor mindegyik A meghatároz egy kvadratikus alakot (nevezetesen az $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ függvényt), ami triviálisan teljesíti a paralelogramma azonosságot. Minden szóbanforgó A operátorra $A \leq I$. A $\mathcal{F}$ irányítottsága miatt ezen alakok pontonkénti szuprémuma, a

$$Q(x) = \sup_A \langle Ax, x\rangle = \lim_A \langle Ax, x\rangle$$

függvény is eleget tesz a paralelogramma azonosságnak. A fenti lemma miatt ekkor Q egy B sesquilineáris forma nyoma. Világos, hogy $|B(x,x)| \leq \|x\|^2$. A B-re polarizációt

alkalmazva ebből könnyen adódik, hogy B folytonos a $(0,0)$ pontban. Ebből a lineáris operátorok korlátossága és origóban való folytonossága ekvivalenciájának bizonyításában alkalmazott módszerhez teljesen hasonlóan kapjuk, hogy B korlátos sesquilineáris forma. Ezért létezik olyan $T \in B(H)$, hogy $B(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ $(x, y \in H)$. Mivel

$$\langle Tx, x\rangle = \lim_A \langle Ax, x\rangle$$

így ugyancsak polarizációt alkalmazva könnyen látható, hogy T eleme $\mathcal{A}$ gyenge lezártjának, s így $\mathcal{A}$-nak is. Legyen $g = \hat{T}$. Mivel $0 \leq T \leq I$, ezért $0 \leq g \leq 1$. A konstrukciónkból az is következik, hogy g felső korlátja $\mathcal{F}$-nek és tetszőleges olyan $h : X \to [0,1]$ folytonos függvényre, melyre $f \leq h$ teljesül minden $f \in \mathcal{F}$ esetén, egyúttal $g \leq h$ is teljesül. Így $g = \sup \mathcal{F}$. Ha $x \notin \overline{U}$, akkor az Uryson-lemma miatt létezik olyan $f \in \mathcal{F}$, melyre $f(x) = 1$. Ebből adódik, hogy $g(x) = 1$. Tehát $g = 1$ az $\overline{U}$ komplementumán. Ha $x \in U$, akkor hasonló meggondolások miatt létezik olyan $h : X \to [0,1]$ folytonos függvény, melyre $h|_{X\setminus U} = 1$ és $h(x) = 0$. Mivel h nyilvánvalóan felső korlátja $\mathcal{F}$-nek, így $g \leq h$, azaz $g(x) = 0$. Ezért $g = 0$ az U-n. Így kapjuk, hogy

$$\overline{U} \subset g^{-1}(0) \subset g^{-1}([0,1[) \subset \overline{U}.$$

Innen $\overline{U} = g^{-1}([0,1[)$ következik, tehát $\overline{U}$ nyílt halmaz. A bizonyítás ezzel teljes.

3.4.3. Megjegyzés. Megmutatható, hogy a $B(H)$ kommutatív C^*-részalgebrái között az a tény, hogy a struktúratér Stone-tér, nem karakterizálja a kommutatív Neumann-algebrákat. Nevezetesen, létezik olyan X Stone-tér, melyre $C(X)$ nem izometrikusan *-izomorf egyetlen kommutatív Neumann-algebrával sem.

3.4.4. Lemma. *Legyen $0 \neq P_n \in B(H)$ egymással felcserélhető projekciók egy sorozata és*

$$A = \sum_n \frac{1}{3^n} P_n.$$

Ekkor a $\{P_n\}_n$ család által generált kommutatív egységelemes C^*-algebra megegyezik az A által generálttal.

B i z o n y í t á s. Világos, hogy $C^*(\{P_n\}_n)$ tartalmazza $C^*(A)$-t. A másik irányú tartalmazáshoz vegyük észre a következőket. Ha X jelöli a $C^*(\{P_n\}_n)$ sruktúraterét, akkor mivel a P_n-nek által generált részalgebra sűrű $C^*(\{P_n\}_n)$-ben, így ugyanez igaz a P_n-ek Gelfand-transzformáltjaival kapcsolatban a $C(X)$-re vonatkozóan is. Mivel X kompakt Hausdorff-tér ezért X normális és így a rajta értelmezett folytonos függvények elválasztják X pontjait. Ebből a fentiek miatt adódik a $\{\hat{P}_n\}_n$ család szeparáló volta. Könnyen belátható, hogy az A konstrukciójából adódóan ekkor $\hat{A}$ már magában is szeparál (ehhez kell, hogy az A előállításában a P_n együtthatója éppen $1/3^n$). Innen a

Stone-Weierstrass-tétel miatt adódik, hogy $C(X)$ minden eleme, így a $\hat{P}_n$-k mindegyike is egyenletesen approximálható $C(X)$-ben az $\hat{A}$ polinomjaival. Ezért ugyanez igaz az P_n-ek és az A viszonylatában. Ezért $P_n \in C^*(A)$ ahonnan kapjuk, hogy $C^*(\{P_n\}_n) \subset C^*(A)$. A bizonyítás ezzel teljes.

3.4.5. Tétel. *Ha H szeparábilis Hilbert-tér, $\mathcal{A} \subset B(H)$ pedig kommutatív Neumann-algebra, akkor létezik olyan $A \in \mathcal{A}$ önadjungált operátor, melyre $W^*(A) = \mathcal{A}$.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{P}$ az $\mathcal{A}$-beli projekciók halmazát. Mivel $(B(H))_1$ az erős operátor topológiával szeparábilis metrikus tér (3.1.6. Tétel, 3.1.7. Tétel), így $\mathcal{P}$ is szeparábilis (szeparábilis metrikus tér minden altere is szeparábilis). Legyen (P_n) erősen sűrű sorozat $\mathcal{P}$-ben. A 3.2.6. Tétel (i) pontja miatt $\mathcal{A}$ megegyezik $\mathcal{P}$ lineáris burkának operátor normában való lezártjával. Innen kapjuk, hogy $\mathcal{A} \subset W^*(\{P_n\}_n)$. Mivel a másik irányú tartalmazás világos, így

$$\mathcal{A} = W^*(\{P_n\}_n),$$

ahonnan az előző lemma felhasználásával adódik az állítás.

3.4.6. Megjegyzés. Megmutatható, hogy analóg állítás nem igaz kommutatív C^*-algebrákra vonatkozóan. Valóban, ha H szeparábilis végtelen dimenziós Hilbert-tér, amiben rögzítünk egy teljes ortonormált sorozatot, akkor az erre nézve diagonális operátorok összessége természetes módon beazonosítható az l_∞-vel, ami izometrikusan izomorf $C(\beta\mathbb{N})$-nel. Így ha ezen operátorok C^*-algebrája generálható lenne egy elemmel, akkor ugyanez igaz lenne a $C(\beta\mathbb{N})$ függvényalgebrára, amiből az következne, hogy $\beta\mathbb{N}$-en lenne injektív folytonos komplex függvény, ami nyilvánvalóan nem igaz, hiszen $\beta\mathbb{N}$ számossága 2^c.

Megjegyezzük továbbá, hogy Neumann azt sejtette, hogy szeparáblis Hilbert-téren minden Neumann-algebra generálható egy elemmel. Ezen sejtést Neumann-algebrák számos részosztályára sikerült igazolni, azonban teljes általánosságában a probléma még megoldatlan.

3.4.7. Tétel. *Legyen H szeparábilis Hilbert-tér és $\mathcal{A} \subset B(H)$ kommutatív Neumann-algebra. Ekkor létezik olyan $K \subset \mathbb{C}$ kompakt halmaz és μ véges Borel-mérték K-n, melynél nemüres nyílt halmaz mértéke pozitív, úgy hogy $\mathcal{A}$ izometrikusan *-izomorf $\mathbb{L}^\infty(\mu)$-vel.*

Bizonyítás. A 3.4.5. Tétel és a 3.3.14. Tétel következménye.

3.5 Projekciók geometriája

3.5.1. Definíció. Legyen $\{P_\gamma\}$ a $B(H)$ projekcióinak egy tetszőleges halmaza. Jelölje $\vee_\gamma P_\gamma$ a P_γ-k értékkészletei által kifeszített altérre való ortogonális projekciót. Világos, hogy $\vee_\gamma P_\gamma$ éppen a $\{P_\gamma\}$ rendszer szuprémuma a projekciók parciálisan rendezett halmazában.

Hasonlóan, lelölje $\wedge_\gamma P_\gamma$ a P_γ-k értékkészleteinek metszetére való ortogonális projekciót. Világos, hogy $\wedge_\gamma P_\gamma$ éppen a $\{P_\gamma\}$ rendszer infimuma a projekciók parciálisan rendezett halmazában.

3.5.2. Megjegyzés. Tetszőleges P projekció esetén jelölje $P^\perp = I - P$. Egyszerű meggondolások mutatják, hogy fennállnak az alábbi de Morgan típusú azonosságok:

$$(\vee_\gamma P_\gamma)^\perp = \wedge_\gamma P_\gamma^\perp, \quad (\wedge_\gamma P_\gamma)^\perp = \vee_\gamma P_\gamma^\perp.$$

3.5.3. Megjegyzés. Legyen L egy parciálisan rendezett halmaz. Azt mondjuk, hogy L háló, ha bármely $a, b \in L$ elem esetén létezik az $\{a, b\}$ halmaznak pontos alsó és pontos felső korlátja L-ben. (Ezek szokásos jelölése $a \wedge b$ és $a \vee b$.) Az L-et teljes hálónak hívjuk, ha benne tetszőleges részhalmznak létezik a pontos alsó és pontos felső korlátja.

Azt mondjuk, hogy $\perp\colon L \to L$ ortokomplementálás az L parciálisan rendezett halmazon, melynek van minimális eleme 0 és maximális eleme 1, ha

(i) $(a^\perp)^\perp = a$;

(ii) $a \leq b \Longrightarrow b^\perp \leq a^\perp$;

(iii) $a \vee a^\perp = 1$

teljesül minden $a, b \in L$ esetén. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy L egy ortokomplementáris parciálisan rendezett halmaz. Jelölje $a \perp b$ ha $a \leq b^\perp$. Könnyű látni, hogy L-ben teljesülnek az alábbi de Morgan típusú azonosságok:

$$(\vee_i a_i)^\perp = \wedge_i a_i^\perp, \quad (\wedge_i a_i)^\perp = \vee_i a_i^\perp,$$

feltételezve, hogy a fenti egyenlőségek valamelyik oldala létezik.

Egy L ortokomplementáris parciálisan rendezett halmazt ortomodulárisnak nevezünk, ha

(i) $a \vee b \in L$ minden $a \perp b$, $a, b \in L$ esetén;

(ii) ha $a \leq b$, akkor $b = a \vee (b \wedge a^\perp)$.

Ezek után világos, hogy tetszőleges Hilbert-téren értelmezett projekciók halmaza a szokásos rendezéssel és ortokomplementálással teljes ortomoduláris háló. Az alábbi tétel egyszerű következménye, hogy ugyanez igaz Neumann-algebra projekcióinak halmazára is.

3.5.4. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy Neumann-algebra és $P_\gamma \in \mathcal{A}$ $(\gamma \in \Gamma)$ projekciók egy tetszőleges rendszere. Ekkor*

$$\vee_\gamma P_\gamma, \ \ \wedge_\gamma P_\gamma \in \mathcal{A}.$$

Bizonyítás. Legyen $P, Q \in \mathcal{A}$ projekció. Ekkor egyszerű számolás mutatja, hogy

$$(\operatorname{rng} P \cup \operatorname{rng} Q)^\perp = (\operatorname{rng} P)^\perp \cap (\operatorname{rng} Q)^\perp = \ker P \cap \ker Q = \ker (P + Q).$$

A 3.2.5. Tétel (*iii*) pontja miatt kapjuk, hogy $P \vee Q \in \mathcal{A}$. Legyen most $F \subset \Gamma$ tetszőleges véges részhalmaz. Ekkor $P_F = \vee_{\gamma \in F} P_\gamma \in \mathcal{A}$. Belátható, hogy a $(P_F)_{F \subset \Gamma \text{ véges részhalmaz}}$ erősen konvergál $\vee_\gamma P_\gamma$-hoz. Innen adódik az állítás.

3.5.5. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ Neumann-algebra és $P, Q \in \mathcal{A}$ projekciók. A P-t és Q-t egymással ekvivalensnek nevezzük (jelölése: $P \sim Q$) ha létezik olyan $V \in \mathcal{A}$ parciális izometria, melyre $P = V^*V$ és $Q = VV^*$. Továbbá azt írjuk, hogy $P \precsim Q$, ha $P \sim R \leq Q$ valamely $R \in \mathcal{A}$ projekció esetén, azaz ha P ekvivalens a Q valamely szubprojekciójával.

3.5.6. Tétel. (Az ekvivalencia additivitása). *Legyen $\mathcal{A}$ egy Neumann-algebra, $(P_\alpha), (Q_\alpha)$ pedig két $\mathcal{A}$-beli páronként ortogonális projekciókból álló család. Ha $P_\alpha \sim Q_\alpha$ minden α esetén, akkor*

$$\sum_\alpha P_\alpha \sim \sum_\alpha Q_\alpha.$$

Bizonyítás. Legyen $V_\alpha \in \mathcal{A}$ parciális izometria, melyre $V_\alpha^* V_\alpha = P_\alpha$ és $V_\alpha V_\alpha^* = Q_\alpha$. Mivel (P_α) elemei páronként ortogonálisak, ezért a V_α^*-ok értékkészletei is páronként ortogonálisak. hasonlóan kapjuk a V_α értékkészleteinek ortogonalitását.

A $\sum_{\gamma \in \Gamma} V_\alpha x$ sor ortogonális sor lévén pontosan akkor konvergens ha

$$\sum_\alpha \|V_\alpha x\|^2 = \sum_\alpha \langle P_\alpha x, x\rangle = \sum_\alpha \langle P_\alpha x, P_\alpha x\rangle = \sum_\alpha \|P_\alpha x\|^2 < \infty$$

ami azonban minden $x \in H$ esetén fennáll. A $\sum_\alpha V_\alpha^* x$ $(x \in H)$ ortogonális sor esetén teljesen hasonlóan járhatunk el. Ezért a $\sum_\alpha V_\alpha$ és $\sum_\alpha V_\alpha^*$ sorok erősen konvergensek.

Jelölje V a $\sum_\alpha V_\alpha$ erős határértékét. Világos, hogy V lineáris operátor, és a P_α-k páronkénti ortogonalitása miatt $\|Vx\|^2 \leq \|x\|^2$ minden $x \in H$ esetén. Innen kapjuk,

hogy V korlátos lineáris operátor. Mivel az erős konvergencia maga után vonja a gyenge konvergenciát, könnyű látni, hogy $\sum_\alpha V_\alpha^*$ erős határértéke (ami a fentiekhez hasonlóan létezik), éppen V^*. Mivel a $B(H)$ egységgömbjén a szorzás az erős topológiára nézve folytonos (lásd 3.1.9. Megjegyzés), a fenti ortogonalitási tulajdonságokat figyelembe véve kapjuk, hogy

$$V^*V = \sum_\alpha V_\alpha^* V_\alpha = \sum_\alpha P_\alpha \quad \text{és} \quad VV^* = \sum_\alpha V_\alpha V_\alpha^* = \sum_\alpha Q_\alpha$$

az erős operátortopológiában. Ezért V^*V, VV^* projekciók, ahonnan következik, hogy $V \in \mathcal{A}$ parciális izometria és $\sum_\alpha P_\alpha \sim \sum_\alpha Q_\alpha$. A bizonyítás ezzel teljes.

3.5.7. Megjegyzés. Legyen $\mathcal{A}$ egy Neumann-algebra. Könnyű megmutatni, hogy $\mathcal{A}$ projekcióinak halmazán a $\precsim$ reláció reflexív és tranzitív. Az alábbiakban megmutatjuk ezen reláció antiszimmetrikus voltát.

3.5.8. Tétel. (Schröder-Bernstein-féle tétel). *Legyen P, Q projekció a $\mathcal{A}$ Neumann-algebrában. Ha $P \precsim Q$ és $Q \precsim P$, akkor $P \sim Q$.*

A bizonyításhoz felhasználjuk a következő eredményt: Teljes hálón értelmezett rendezésmegőrző leképezésnek van fixpontja. (Bizonyítás: Legyen ϕ a szóbanforgó leképezés és jelölje $p = \sup\{q : q \leq \phi(q)\}$. Legyen q egy tetszőleges eleme a p-t definiáló halmaznak. Ekkor $q \leq p$ miatt $q \leq \phi(q) \leq \phi(p)$. Mivel ez minden ilyen q-ra teljesül, ezért $p \leq \phi(p)$. Innen kapjuk, hogy $\phi(p) \leq \phi(\phi(p))$. Így $\phi(p)$ eleme a p-t definiáló halmaznak, s ezért $\phi(p) \leq p$. Innen kapjuk, hogy $p = \phi(p)$.)

Legyenek most $U, V \in \mathcal{A}$ parciális izometriák, melyekre $U^*U = P, UU^* \leq Q$ és $V^*V \leq P, VV^* = Q$. Tetszőleges $R \leq Q$ projekció esetén legyen

$$\phi(R) = Q - U(P - V^*RV)U^*.$$

Belátható, hogy ϕ egy rendezéstartó leképezése a $\{R \in \mathcal{A} : R \text{ projekció}, R \leq Q\}$ teljes hálónak önmagába. Ezért létezik olyan $R \leq Q$ projekció, melyre

$$R = Q - U(P - V^*RV)U^*.$$

Tekintsük most az RV és $(P - V^*RV)U^*$ operátorokat. Könnyű látni, hogy $(RV)(RV)^* = R$, $(RV)^*(RV) = V^*RV$, továbbá

$$((P - V^*RV)U^*)^*(P - V^*RV)U^* = Q - R$$

és

$$(P - V^*RV)U^*((P - V^*RV)U^*)^* = P - V^*RV.$$

Innen kapjuk, hogy $R \sim V^*RV$ és $Q - R \sim P - V^*RV$. Az ekvivalencia additivitása miatt ezekből következik, hogy $Q \sim P$. A bizonyítás ezzel teljes.

3.5.9 . Definíció. Legyen $T \in B(H)$. Jelölje $\operatorname{rp}(T)$ a T értékkészletének lezártjára történő ortogonális projekció operátorát amit a T range-projekciójának nevezünk.

3.5.10 . Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy Neumann-algebra és $A \in \mathcal{A}$. Ekkor az $\mathcal{A}$ azon centrális projekcióinak a pontos alsó korlátját, melyek nagyobb-egyenlőek $\operatorname{rp} A$-nál, az A centrális fedőjének nevezzük és C_A-val jelöljük.

3.5.11 . Megjegyzés. Könnyű látni, hogy az $\mathcal{A}$ Neumann-algebra centruma, azaz $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ is Neumann-algebra. Ezért tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén C_A centrális projekció.

3.5.12 . Állítás. *Legyen $A \in \mathcal{A}$. Ekkor A centrális fedőjének értékkészletére fennáll, hogy*

$$\operatorname{rng} C_A = \overline{[\mathcal{A}\mathcal{A}' \operatorname{rng} A]}$$

B i z o n y í t á s. Legyen $P \in \mathcal{A}$ centrális projekció, melyre $\operatorname{rp} A \leq P$. Ekkor tetszőleges $T \in \mathcal{A}$ és $S \in \mathcal{A}'$ esetén

$$P(TSAx) = TPSAx = TPASx = TASx = TSAx \qquad (x \in H).$$

Ezért $[\mathcal{A}\mathcal{A}' \operatorname{rng} A] \subset \operatorname{rng} C_A$. Továbbá világos, hogy $\overline{[\mathcal{A}\mathcal{A}' \operatorname{rng} A]}$ invariáns altere $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ elemeinek. Ezért a rá történő ortogonális projekció operátora felcserélhető minden $\mathcal{A}$-beli és minden $\mathcal{A}'$-beli operátorral. Innen kapjuk, hogy $P \in \mathcal{A}'$ és $P \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$. Tehát P centrális projekciója az $\mathcal{A}$-nak, ami nagyobb-egyenlő az $\operatorname{rp} A$-nál. Innen kapjuk, hogy $\operatorname{rng} C_A \subset \overline{[\mathcal{A}\mathcal{A}' \operatorname{rng} A]}$ és ezzel a bizonyítás teljes.

3.5.13 . Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ Neumann-algebra és $A \in \mathcal{A}$. Ekkor* $\operatorname{rp}(A) \sim \operatorname{rp}(A^*)$.

B i z o n y í t á s. Legyen $A = U|A|$ az A poláris felbontása. Ennek komponensei elemei $\mathcal{A}$-nak. Továbbá, mivel $UU^* = \operatorname{rp} A$ és $U^*U = \operatorname{rp}|A|$, így $\operatorname{rp} A \sim \operatorname{rp}|A|$. Mivel $\ker|A| = \ker A$, ezért

$$\overline{\operatorname{rng}|A|} = (\ker|A|)^\perp = (\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{rng} A^*}.$$

Innen kapjuk, hogy $\operatorname{rp} A \sim \operatorname{rp}|A| = \operatorname{rp} A^*$.

3.5.14 . Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ egy Neumann-algebra és $P, Q \in \mathcal{A}$ projekciók. Ekkor $P\mathcal{A}Q \neq \{0\}$ pontosan akkor áll fenn, ha P-nek és Q-nak van nemzérus ekvivalens szubprojekciója, azaz ha létezik olyan $0 \neq P_0 \leq P$, $0 \neq Q_0 \leq Q$ projekció, melyre $P_0, Q_0 \in \mathcal{A}$ és $P_0 \sim Q_0$.*

B i z o n y í t á s. Tegyük fel először, hogy $P\mathcal{A}Q \neq \{0\}$. Legyen $A \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $PAQ \neq 0$. Legyen $P_0 = \mathrm{rp}\,(PAQ)$ és $Q_0 = \mathrm{rp}\,(QA^*P)$. Ekkor $P_0, Q_0 \in \mathcal{A}$, $0 \neq P_0 \leq P$, $0 \neq Q_0 \leq Q$ és az előző állítás miatt $P_0 \sim Q_0$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy P-nek és Q-nak van egymással ekvivalens nemzérus szubprojekciója: P_0, Q_0. Legyen $U \in \mathcal{A}$ parciális izometria, melyre $U^*U = P_0$, $UU^* = Q_0$. Ekkor

$$P(P_0U^*Q_0)Q = P_0U^*Q_0 = U^*UU^*Q_0 = U^*Q_0 = U^*UU^* = U^* \neq 0,$$

tehát $P\mathcal{A}Q \neq \{0\}$.

3.5.15. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ Neumann-algebra, $P, Q \in \mathcal{A}$ projekciók. Ekkor P-nek és Q-nak pontosan akkor van egymással ekvivalens nemzérus szubprojekciója, ha $C_PC_Q \neq 0$.*

B i z o n y í t á s. Legyen $C_PC_Q = 0$. Világos, hogy $P \leq C_P$ és $Q \leq C_Q$. Ezért

$$PAQ = PC_PAC_QQ = PAC_PC_QQ = 0$$

minden $A \in \mathcal{A}$ esetén. Ezért a 3.5.14. Állítás miatt P-nek és Q-nak nincs egymással ekvivalens nemzérus szubprojekciója.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $P\mathcal{A}Q = \{0\}$. Ekkor $P\mathcal{A}\mathcal{A}'Q = \{0\}$ is nyilvánvalóan teljesül, ahonnan a 3.5.12. Állítás miatt kapjuk, hogy $PC_Q = 0$. Tehát $P \leq I - C_Q$ és ez utóbbi projekció centrális. Innen következik, hogy $C_P \leq I - C_Q$, s ezért $C_PC_Q = 0$.

3.5.16. Megjegyzés. A fentiekben tehát kaptuk az alábbi szép algebrai jellemzést: a $P, Q \in \mathcal{A}$ projekciókra $P\mathcal{A}Q = \{0\}$ pontosan akkor teljesül, ha $C_PC_Q = 0$.

3.5.17. Megjegyzés. Könnyű látni, hogy ha P, Q projekciók az $\mathcal{A}$ Neumann-algebrában, $P \sim Q$ és R centrális projekció, akkor $PR \sim QR$. Ezen észrevételre szükségünk lesz a következő tétel bizonyításában.

3.5.18. Tétel. (Összehasonlítási tétel). *Legyen $\mathcal{A}$ Neumann-algebra, $P, Q \in \mathcal{A}$ projekciók. Ekkor létezik olyan $R \in \mathcal{A}$ centrális projekció, melyre $PR \precsim QR$ és $PR^\perp \succsim QR^\perp$.*

B i z o n y í t á s. Legyen $\{P_\alpha\}$, $\{Q_\alpha\}$ ortogonális projekciók családjainak maximális párja, melyre $P_\alpha \leq P$, $Q_\alpha \leq Q$ és $P_\alpha \sim Q_\alpha$. (A Zorn-lemma miatt ilyen maximális pár létezik.) Az ekvivalencia additivitása miatt a $P_0 = \sum_\alpha P_\alpha$, $Q_0 = \sum_\alpha Q_\alpha$ projekciókra teljesül, hogy $P_0 \sim Q_0$. Legyen $P_1 = P - P_0$ és $Q_1 = Q - Q_0$. Ha a P_1-nek és Q_1-nek lennének ekvivalens szubprojekciói, akkor ellentmondásba kerülnénk a $\{P_\alpha\}$, $\{Q_\alpha\}$

pár maximalitásával. Ezért 3.5.15. Állítás miatt $C_{P_1}C_{Q_1} = 0$. Legyen $R = C_{Q_1}$. A $P_1C_{P_1} = P_1$ és $Q_1C_{Q_1} = Q_1$ összefüggések felhasználásával kapjuk, hogy

$$PR = P_0R + P_1R = P_0R + (P_1C_{P_1})C_{Q_1} = P_0R \sim Q_0R \leq QR$$

és

$$QR^\perp = Q_0R^\perp + Q_1R^\perp = Q_0R^\perp + Q_1(I - C_{Q_1}) = Q_0R^\perp \sim P_0R^\perp \leq PR^\perp.$$

A bizonyítás ezzel teljes.

3.5.19. Definíció. Az $\mathcal{A}$ Neumann-algebrát faktornak nevezzük, ha centruma triviális, azaz ha $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \mathbb{C}I$.

3.5.20. Következmény. *Legyen $\mathcal{A}$ faktor és $P, Q \in \mathcal{A}$. Ekkor $P \precsim Q$ vagy $P \succsim Q$.*

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{A}$-nak két centrális projekciója van, nevezetesen a 0 és I, ezért a 3.5.18. Tételből azonnal adódik az állítás.

3.6 Neumann-algebrák osztályozása

3.6.1. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ Neumann-algebra és $P \in \mathcal{A}$ projekció.

(i) Azt mondjuk, hogy P véges projekció, ha P-nek önmagával ekvivalens szubprojekciója csak egy van, önmaga.

(ii) A P-t végtelen projekciónak nevezzük ha nem véges.

(iii) Az $\mathcal{A}$ Neumann-algebrát végesnek vagy végtelennek nevezzük aszerint, hogy I véges vagy végtelen.

3.6.2. Állítás. *Az alábbi állítások igazak:*

(i) Ha $\mathcal{A}$ Neumann-algebra és $P, Q \in \mathcal{A}$ projekciók, melyekre $P \precsim Q$ és Q véges, akkor P is véges.

(ii) Ha $\mathcal{A}$ kommutatív, akkor $\mathcal{A}$ véges.

(iii) Az $M_n(\mathbb{C})$ matrixalgebra véges Neumann-algebra.

B i z o n y í t á s. Az első állításhoz, legyen $P_0 \leq P$, melyre $P_0 \sim P$. Mivel létezik olyan $Q_0 \leq Q$ projekció $\mathcal{A}$-ban, melyre $P \sim Q_0$, így $P_0 \sim P \sim Q_0$.

Legyen $U \in \mathcal{A}$ parciális izometria Q_0 értékkészletéről P értékkészletére és $V \in \mathcal{A}$ parciális izometria P értékkészletéről P_0 értékkészletére. Ekkor VU parciális izometria Q_0 értékkészletéről P_0 értékkészeletére. Legyen $Q_1 = U^*P_0U$. Világos, hogy Q_1 önadjungált és

$$U^*P_0UU^*P_0U = U^*P_0PP_0U = U^*P_0U$$

miatt Q_1 idempotens. Ezért Q_1 egy szubprojekciója Q_0-nak. Legyen $W = U^*VU$. Ekkor

$$W^*W = U^*V^*UU^*VU = U^*V^*PVU = U^*V^*VU = U^*PU = U^*U = Q_0$$

és

$$WW^* = U^*VUU^*V^*U = U^*VPV^*U = U^*VV^*U = U^*P_0U = Q_1.$$

Mivel Q_1 egy olyan szubprojekciója Q_0-nak, ami vele ekvivalens, így mindkét projekciót a $Q - Q_0$-lal "bővítve" a Q végessége miatt kapjuk, hogy $Q_1 = Q_0$. Ezért $U^*P_0U = Q_0$, ahonnan $UU^*P_0UU^* = UQ_0U^*$ következik. Innen kapjuk, hogy

$$P_0 = PP_0P = UU^*P_0UU^* = UQ_0U^* = UU^* = P.$$

Az (i) bizonyítás ezzel kész.

Ha $\mathcal{A}$ kommutatív, akkor az I-vel ekvivalens projekció csak egy van: az I. Ebből kapjuk a (ii) állítást.

A (iii) állítás abból következik, hogy véges dimenzióban minden izometria unitér.

3.6.3. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy ha P, Q véges projekciók az $\mathcal{A}$ Neumann-algebrában, akkor $P \vee Q$ is véges. Ezen állítás bizonyítása azonban korántsem egyszerű. Megemlítjük, hogy az úgynevezett paralelogramma szabály segítségével (ez azt mondja ki, hogy tetszőleges $P, Q \in \mathcal{A}$ projekciók esetén $P \vee Q - Q \sim P - P \wedge Q$) elegendő csak az egymásra ortogonális véges projekciók esetével foglalkozni.

3.6.4. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy Neumann-algebra és $P \in \mathcal{A}$ projekció. A P-t Abel-projekciónak nevezzük, ha a $P\mathcal{A}P$ algebra kommutatív.

3.6.5. Megjegyzés. Minden $P \in \mathcal{A}$ Abel-projekció véges. Valóban, ha $Q \in \mathcal{A}$ egy olyan szubprojekciója P-nek, ami ekvivalens P-vel, akkor létezik olyan $U \in \mathcal{A}$ parciális izometria, melyre $Q = U^*U$, $P = UU^*$. Könnyen látszik, hogy $U = PUP \in \mathcal{A}$. Mivel P Abel-projekció, ezért innen kapjuk, hogy $Q = U^*U = UU^* = P$. Tehát P véges.

3.6.6. Megjegyzés. Ha $P \in \mathcal{A}$ projekció, akkor a $P\mathcal{A}P$ algebra Neumann-algebra a $\operatorname{rng} P$ Hilbert-téren. Csak a gyenge operátortopológiában való zártságot mutatjuk meg. Tegyük fel, hogy $PA_\alpha P$ egy gyengén konvergens nett, melynek határértéke A. Ekkor

$$PAP = \lim_\alpha P(PA_\alpha P)P = \lim_\alpha PA_\alpha P = A,$$

tehát $A \in P\mathcal{A}P$.

Ha $P \in \mathcal{A}$ Abel-projekció és $Q \precsim P$, akkor Q is Abel-projekció. Valóban, legyen P_0 olyan szubprojekciója P-nek, amire $Q \sim P_0$. Legyen $U \in \mathcal{A}$ olyan parciális izometria, melyre $U^*U = Q$ és $UU^* = P_0$. Ekkor a $T \mapsto UTU^*$ leképezés *-izomorfizmus $Q\mathcal{A}Q$-ról $P_0\mathcal{A}P_0$-ra. Valóban, mivel minden $A \in \mathcal{A}$ esetén

$$U(QAQ)U^* = UU^*UAU^*UU^* = P_0(UAU^*)P_0$$

és

$$P_0AP_0 = UU^*UU^*AUU^*UU^* = UQ(U^*AU)QU^*$$

miatt kapjuk, hogy transzformációnk $P_0\mathcal{A}P_0$-ra képez. A leképezésünk többi állított tulajdonsága nyílvánvaló. Mivel $P_0\mathcal{A}P_0$ részalgebrája $P\mathcal{A}P$-nek, így kommutatív. Innen kapjuk a $Q\mathcal{A}Q$ kommutativitását.

3.6.7. Definíció. (Neumann-algebrák osztályozása). Legyen $\mathcal{A}$ Neumann-algebra. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$

(1) I. típusú, ha $\mathcal{A}$ minden nemzérus centrális projekciójának van nemzérus Abel-szubprojekciója;

(2) II. típusú, ha $\mathcal{A}$-nak nincs nemzérus Abel-projekciója de $\mathcal{A}$ minden nemzérus centrális projekciójának van nemzérus véges szubprojekciója.

(3) III. típusú, ha $\mathcal{A}$-nak nincs nemzérus véges projekciója.

3.6.8. Definíció. Egy I. típusú Neumann-algebrát I_{fin} típusúnak nevezünk, ha véges és I_∞ típusúnak, ha végtelen. Hasonlóan, egy II. típusú Neumann-algebrát II_1 típusúnak nevezünk, ha véges és II_∞ típusúnak, ha végtelen.

3.6.9. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy minden kommutatív Neumann-algebra és a $B(H)$ teljes operátoralgebra is I. típusú. A $B(H)$ pontosan akkor véges, ha $\dim H$ véges.

3.6.10. Tétel. *Legyen $\mathcal{A} \subset B(H)$ Neumann-algebra. Ekkor léteznek olyan $P_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ egymásra ortogonális centrális projekciók, melyekre $\sum_{i=1}^5 P_i = I$ és*

(i) az $\mathcal{A}P_1$ algebra I_{fin} típusú (vagy $P_1 = 0$);

(ii) az $\mathcal{A}P_2$ algebra I_∞ típusú (vagy $P_2 = 0$);

(iii) az $\mathcal{A}P_3$ algebra II_1 típusú (vagy $P_3 = 0$)

(iv) az $\mathcal{A}P_4$ algebra II_∞ típusú (vagy $P_4 = 0$);

(v) az $\mathcal{A}P_5$ algebra III. típusú (vagy $P_5 = 0$).

Ha $\mathcal{A}$ faktor, akkor a fenti P_i projekciók közül pontosan egy nem zérus.

A bizonyításban szükségünk lesz az alábbi lemmákra.

3.6.11. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ Neumann-algebra a H Hilbert-téren. Legyen $P \in \mathcal{A}$ centrális projekció. Tekintsük az $\mathcal{A}P$ algebra egy Q projekcióját. Ekkor*

(i) Q centrális $\mathcal{A}P$-ben $\Leftrightarrow$ Q centrális $\mathcal{A}$-ban;

(ii) Q véges $\mathcal{A}P$-ben $\Leftrightarrow$ Q véges $\mathcal{A}$-ban;

(iii) Q Abel-projekció $\mathcal{A}P$-ben $\Leftrightarrow$ Q Abel-projekció $\mathcal{A}$-ban.

B i z o n y í t á s. Az (i) abból következik, hogy mivel $I - P$ centrális projekció $\mathcal{A}$-ban és $Q \in \mathcal{A}P$, ezért $QA(I-P) = Q(I-P)A = 0$ és $A(I-P)Q = 0$ minden $A \in \mathcal{A}$ esetén.

A (iii) nyilvánvaló, mivel $Q\mathcal{A}Q = Q(P\mathcal{A}P)Q$ hiszen $Q \leq P$.

A (ii) bizonyítása maradt hátra. Ha Q véges $\mathcal{A}$-ban, akkor világos, hogy Q véges az $\mathcal{A}P$-ben is. Legyen most Q véges az $\mathcal{A}P$-ben. Tegyük fel, hogy létezik olyan U parciális izometria $\mathcal{A}$-ban melyre $U^*U = Q$ és $UU^* = Q'$, ahol $Q' \leq Q$, $Q' \in \mathcal{A}$. Ekkor az UP olyan parciális izometria (P centrális!), melyre $(UP)^*(UP) = PU^*U = PQ = Q$ és $(UP)(UP)^* = UU^*P = Q'P = Q'$ mivel $Q' \leq Q \leq P$. Innen adódik, hogy $Q' \in \mathcal{A}P$ és a Q-nak $\mathcal{A}P$-beli végessége miatt kapjuk, hogy $Q' = Q$. Ezzel a bizonyítás teljes.

3.6.12. Állítás. *Neumann-algebrában centrális projekciók tetszőleges rendszerének szuprémuma is centrális.*

B i z o n y í t á s. Mivel Neumann-algebra centruma is Neumann-algebra (lásd 3.5.11. Megjegyzés), ezért projekciói tetszőleges rendszerének a szuprémumát is tartalmazza (3.5.4. Tétel).

3.6.13. Állítás. *Neumann-algebrában véges centrális projekciók egy tetszőleges rendszerének a szuprémuma is véges centrális projekció.*

B i z o n y í t á s. Legyen $\{P_\alpha\}$ véges centrális projekciók egy rendszere és jelölje P ezen rendszer szuprémumát. Az, hogy P centrális, a 3.6.12. Állítás következménye. Megmutatjuk, hogy P véges. Legyen $Q \leq P$ és $Q \sim P$. Ekkor $QP_\alpha \leq PP_\alpha = P_\alpha$ és $QP_\alpha \sim PP_\alpha = P_\alpha$ miatt (ezen relációk a P_α-k centrális voltából következnek) kapjuk, hogy $QP_\alpha = P_\alpha$. Innen következik, hogy $P_\alpha \leq Q$ minden α esetén, ahonnan $P \leq Q$ adódik. Mivel $Q \leq P$, így $Q = P$, tehát a bizonyítás teljes.

3.6.14. Lemma. *Ha $\{P_\alpha\} \subset B(H)$ projekciók egy rendszere és $Q \in B(H)$ projekció, akkor $Q(\vee_\alpha P_\alpha) \neq 0$ esetén $QP_\alpha \neq 0$ valamely α indexre.*

B i z o n y í t á s. Ha $QP_\alpha = 0$ minden α indexre, akkor $P_\alpha \leq I - Q$ minden α esetén, ahonnan $\vee_\alpha P_\alpha \leq I - Q$ következik, tehát $Q(\vee_\alpha P_\alpha) = 0$.

3.6.15. Lemma. *Ha $P \in \mathcal{A}$ projekció és $Q \in \mathcal{A}$ centrális projekció, akkor $QP = 0 \Leftrightarrow QC_P = 0$.*

B i z o n y í t á s. Ha $QP = 0$, akkor $P \leq I - Q$. Mivel $I - Q$ centrális projekció, ezért $C_P \leq I - Q$, ahonnan kapjuk, hogy $QC_P = 0$. A fordított állítás $P \leq C_P$ miatt nyilvánvaló.

A 3.6.10. Tétel bizonyítása. Legyen E azon $P \in \mathcal{A}$ centrális projekciók szuprémuma, melyekre az $\mathcal{A}P$ algebra I. típusú, továbbá jelölje G azon $Q \in \mathcal{A}$ centrális projekciók szuprémumát, melyekre az $\mathcal{A}Q$ algebra III. típusú. Az E és G centrális projekciók $\mathcal{A}$-ban.

Megmutatjuk, hogy az $\mathcal{A}E$ algebra I. típusú. Legyen $R \in \mathcal{A}E$ nemzérus centrális projekció $\mathcal{A}E$-ben. Mivel $R \leq E$, így E definíciója és 3.6.14. Lemma miatt van olyan P centrális projekció $\mathcal{A}$-ban, melyre az $\mathcal{A}P$ algebra I. típusú és $RP \neq 0$. Mivel P, R centrális projekciók $\mathcal{A}$-ban, így PR egy nemzérus centrális projekció $\mathcal{A}P$-ben. Azonban az $\mathcal{A}P$ algebra I. típusú, ezért PR-nek van nemzérus Abel-szubprojekciója, ami így nemzérus Abel-szubprojekciója R-nek. Ezzel beláttuk, hogy az $\mathcal{A}E$ algebra I. típusú.

Azt állítjuk, hogy az $\mathcal{A}G$ algebra III. típusú. Indirekt tegyük fel, hogy van benne $R \leq G$ nemzérus véges projekció. A G definiciója miatt ekkor van olyan $Q \in \mathcal{A}$ centrális projekció, melyre $RQ \neq 0$ és az $\mathcal{A}Q$ algebrában nincs nemzérus véges projekció. Innen következik, hogy Q-nak nincs nemzérus véges szubprojekciója. Azonban RQ az R véges projekció szubprojekciója, s ezért véges. Így ellentmondáshoz jutunk, ahonnan kapjuk az állítást.

Az E, G projekciók egymásra ortogonálisak, hiszen $EG \neq 0$ esetén az EG centrális projekciónak lenne nemzérus Abel-szubprojekciója (az $\mathcal{A}E$ algebra I. típusú), ami így nemzérus véges szubprojekciója lenne G-nek. Ez azonban ellentmondana annak, hogy az $\mathcal{A}G$ algebra III. típusú.

Tekintsük az $F = I-(E+G)$ centrális projekciót. Azt kell megmutatnunk, hogy az $\mathcal{A}F$ algebra II. típusú. Legyen $P \leq F$ centrális projekció. Ha P-nek nem lenne nemzérus véges szubprojekciója, akkor $\mathcal{A}P$ III. típusú lenne, azaz $P \leq G$ teljesülne, ami ellentmondás. Ezért $\mathcal{A}F$ minden centrális projekciójának van nemzérus véges szubprojekciója. Tegyük fel, hogy létezik $Q \leq F$ nemzérus Abel-projekció $\mathcal{A}$-ban. A centrális fedés definíciója és F centrális volta miatt $C_Q \leq F$. Azt állítjuk, hogy az $\mathcal{A}C_Q$ algebra I. típusú. Ha $R \leq C_Q$ nemzérus centrális projekció $\mathcal{A}$-ban, akkor mivel $RC_Q \neq 0$, így 3.6.15. Lemma miatt $RQ \neq 0$. Ezért RQ egy nemzérus projekció, ami, mivel a Q Abel-projekció szubprojekciója, Abel-projekció. Az $RQ \leq R$ reláció miatt innen kapjuk, hogy az $\mathcal{A}C_Q$ algebra valóban I. típusú. Ebből következik, hogy $C_Q \leq E$, ami ellentmond a korábbaikban már látott $C_Q \leq F$ összefüggésnek. Innen következik, hogy $\mathcal{A}F$-nek nincs nemzérus Abel-projekciója, azaz az $\mathcal{A}F$ algebra II. típusú.

Legyen végezetül Z az $\mathcal{A}$ véges centrális projekcióinak a szuprémuma, ami mint tudjuk véges és centrális (3.6.13. Állítás). Ekkor az $\mathcal{A}EZ$ algebra I_{fin} az $\mathcal{A}EZ^{\perp}$ algebra pedig I_{∞} típusú ($EZ^{\perp}$ centrális projekció ami $EZ^{\perp} \neq 0$ esetén Z definíciója miatt nem lehet véges). Hasonlóan, az $\mathcal{A}FZ$ algebra II_1 az $\mathcal{A}FZ^{\perp}$ pedig II_{∞} típusú.

Ha $\mathcal{A}$ faktor, akkor csak triviális centrális projekciói vannak, ahonnan következik a tétel utolsó része.

3.6.16. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy Neumann-algebra. A $P \in \mathcal{A}$ projekciót hűségesnek nevezzük, ha $C_P = I$.

3.6.17. Tétel. *Az $\mathcal{A}$ Neumann-algebra pontosan akkor I. típusú, ha van hűséges Abel-projekciója.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ algebra I. típusú. Vegyünk nemzérus Abel-projekcióknak egy olyan $\{P_\alpha\}$ maximális rendszerét, aminek elemei páronként ortogonális centrális fedővel rendelkeznek. Azt állítjuk, hogy a $P = \sum_\alpha P_\alpha$ projekció hűséges. Ha $C_P \neq I$ lenne, akkor az $I - C_P$-nek lenne nemzérus Abel-szubprojekciója, R. Mivel $RC_P = 0$ és a C_P projekció centrális, ezért a 3.6.15. Lemma miatt $C_R C_P = 0$ lenne, ahonnan következne, hogy $C_R C_{P_\alpha} = 0$ minden α esetén. Ez azonban ellentmondana a $\{P_\alpha\}$ maximalitásának. Ezért P hűséges. Megmutatjuk, hogy P Abel-projekció. Legyen $Q_\alpha = C_{P_\alpha}$. A $\{P_\alpha\}$ maximalitása miatt $\sum_\alpha Q_\alpha = I$. Tekintsük az $A \mapsto (AQ_\alpha)_\alpha$ *-homomorfizmusát $\mathcal{A}$-nak a $\prod_\alpha \mathcal{A}Q_\alpha$ algebrai direktszorzatba. Mivel $\sum_\alpha Q_\alpha = I$, ezért ezen leképezés injektív. Az $P\mathcal{A}P$ halmaznak a leképezésünknél vett képe a $PQ_\alpha = Q_\alpha P = Q_\alpha P_\alpha = P_\alpha$ összefüggés miatt $\prod_\alpha P_\alpha \mathcal{A} P_\alpha$. Mivel ezen direktszorzat minden tényezője kommutatív (a P_α-k Abel-projekciók), így a direkt szorzat is az, és mivel $P\mathcal{A}P$ ezzel izomorf, így kapjuk, hogy $P\mathcal{A}P$ kommutatív, azaz a P projekció Abel-projekció. Ezzel a bizonyítás első fele kész.

Tegyük most fel, hogy $\mathcal{A}$ egy olyan Neumann-algebra, amiben van hűséges Abel-projekció. Legyen ez P. Ha Q nemzérus centrális projekció, akkor QP egy szubprojekciója Q-nak ami, mivel P-nek is szubprojekciója, ezért Abel-projekció. Ha $QP = 0$ lenne, akkor az 3.6.15. Lemma miatt $QC_P = 0$ is fennállna, ami $C_P = I$ miatt ellentmondás. A bizonyítás ezzel teljes.

Többé-kevésbé hasonló eszközökkel látható be az alábbi tétel is.

3.6.18. Tétel. *Az $\mathcal{A}$ Neumann-algebra pontosan akkor szemivéges (ez azt jelenti, hogy benne minden nemzérus centrális projekciónak van nemzérus véges szubprojekciója), ha van hűséges véges projekciója.*

3.6.19. Megjegyzés. Természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy milyen kapcsolat van egy Neumann-algebra és kommutánsának algebrai tulajdonságai között. Az elmélet alapvető erdeményei közé tartozik az a tétel, mely szerint ha egy $\mathcal{A}$ Neumann-algebra I. típusú (illetve II. típusú illetve III. típusú), akkor ugyanez igaz a kommutánsára is. A finomabb osztályozásra vonatkozóan (tehát amikor az I. típuson belül tekintjük az I_{fin} és I_∞ típusokat, a II. típuson belül pedig a II_1 és II_∞ típusokat), hasonló jellegű állítás nem igaz. Példák illusztrálják, hogy minden lehetséges variáció előfordul egy-egy típuson belül, tehát pl. létezik olyan I_{fin} típusú Neumann-algebra, aminek kommutánsa I_∞ típusú, stb.

3.7 I. típusú Neumann-algebrák

3.7.1. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ egy Neumann-algebra és jelölje centrumát $\mathcal{Z}$. Tetszőleges $P \in \mathcal{A}$ projekció esetén $P\mathcal{A}P$ centruma $\mathcal{Z}P$.*

Bizonyítás. Emlékeztetünk rá, hogy tetszőleges P, Q projekció esetén $P\mathcal{A}Q = \{0\}$ pontosan akkor teljesül, ha $C_P C_Q = 0$ (3.5.16. Megjegyzés).

Az nyilvánvaló, hogy $\mathcal{Z}P$ része a $P\mathcal{A}P$ centrumának. Ha Q centrális projekció $P\mathcal{A}P$-ben, akkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén

$$QA(P-Q) = Q(PAP)(P-Q) = (PAP)Q(P-Q) = 0,$$

ahol felhasználtuk, hogy $Q \leq P$. Innen kapjuk, hogy $C_Q C_{P-Q} = 0$ s így $C_Q(P-Q) = 0$. Ezért $C_Q P = C_Q Q = Q$, amiből következik, hogy $Q \in \mathcal{Z}P$. Mivel Neumann-algebra centruma is Neumann-algebra, ezért megegyezik a projekciói által generált lineáris altérnek az operátornorma topológiában való lezártjával. Így adódik, hogy $P\mathcal{A}P$ centruma része $\mathcal{Z}P$-nek, s ezzel a bizonyítás teljes.

A fenti bizonyítás második részében láttuk, hogy igaz az alábbi összefüggés:

3.7.2. Következmény. *A $P\mathcal{A}P$ tetszőleges Q centrális projekciójára $Q = C_Q P$.*

3.7.3. Következmény. *Ha P Abel-projekció, akkor $P\mathcal{A}P = \mathcal{Z}P$.*

3.7.4. Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ faktor, akkor $P\mathcal{A}P$ is faktor.*

3.7.5. Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ faktor, akkor $\mathcal{A}$ minden nemzérus Abel-projekciója minimális.*

Bizonyítás. Legyen P nemzérus Abel-projekció. Ekkor a 3.7.3. Következmény miatt $P\mathcal{A}P = \mathbb{C}P$, ami ekvivalens a P minimalitásával (az elegendőség abból következik, hogy P minimalitása esetén a $P\mathcal{A}P$ Neumann-algebrában nincs nem triviális projekció, amiből adódik, hogy $P\mathcal{A}P = \mathbb{C}P$).

3.7.6. Következmény. *Az $\mathcal{A}$ Neumann-algebra pontosan akkor I. típusú faktor, ha van benne hűséges minimális projekció.*

Bizonyítás. A 3.6.17. Tétel miatt, ha $\mathcal{A}$ egy I. típusú Neumann-algebra, akkor van benne hűséges Abel-projekció, P. Mivel $\mathcal{A}$ faktor, a 3.7.5. Következmény miatt kapjuk, hogy P minimális.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$-ban van hűséges minimális projekció, P. Ekkor P minimalitása miatt $P\mathcal{A}P = \mathbb{C}P$. Ezért P hűséges Abel-projekció és a 3.6.17. Tétel miatt $\mathcal{A}$ egy I. típusú Neumann-algebra. Továbbá, ha $Q \in \mathcal{A}$ centrális projekció, akkor QP centrális projekció $P\mathcal{A}P$-ben, tehát $QP \in \mathbb{C}P$. Ezért $QP = 0$ vagy $QP = P$. Ha $QP = P$, akkor $P \leq Q$, ahonnan $C_P \leq Q$ következik és ezért $Q = I$. Ha $QP = 0$, akkor $(I - Q)P = P$, s az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy $Q = 0$. Ezért $\mathcal{A}$ centrumában csak triviális projekciók vannak, amiből következik, hogy $\mathcal{A}$ faktor.

3.7.7. Lemma. *Legyen (P_α) az $\mathcal{A}$ Neumann-algebra Abel-projekcióinak egy olyan rendszere, melynek elemei páronként ortogonális centrális fedővel rendelkeznek. Ekkor $\vee_\alpha P_\alpha$ is Abel-projekció.*

Bizonyítás. A 3.6.17. Tétel bizonyításából következik.

3.7.8. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ egy I. típusú Neumann-algebra. Ekkor $\mathcal{A}$ tetszőleges projekciójának van olyan Abel-szubprojekciója, aminek centrális fedője megegyezik az előbbi projekció centrális fedőjével. Tetszőleges $P \in \mathcal{A}$ nemzérus projekció esetén $P\mathcal{A}P$ egy I. típusú Neumann-algebra.*

Bizonyítás. Legyen $Q \in \mathcal{A}$ nemzérus projekció. Feltételünk miatt $\mathcal{A}$-ban van hűséges Abel-projekció, legyen ez P. Mivel $C_Q C_P = C_Q \neq 0$, ezért a 3.5.15. Állítás miatt P-nek és Q-nak van egymással ekvivalens nemzérus szubprojekciója. Mivel P Abel-projekció, ezért minden szubprojekciója is Abel-projekció, ahonnan adódik, hogy Q említett szubprojekciója is ugyanilyen.

Tekintsük most a Q-beli nemzérus Abel-projekciók egy maximális rendszerét, melynek elemei páronként ortogonális fedővel rendelkeznek. Ekkor a 3.7.7. Lemma miatt ezek összege Q_0 is Abel-projekció. Tegyük fel, hogy $Q(C_Q - C_{Q_0}) \neq 0$. Ekkor a már bizonyítottak szerint a $Q(C_Q - C_{Q_0})$ nemzérus projekciónak van nemzérus Abel-szubprojekciója, ami egyrészt benne van Q-ban, másrészt benne van C_{Q_0} ortogonális komplementerében, tehát centrális fedője ortogonális C_{Q_0}-ra. Ez azonban ellentmond a választott projekciórendszer maximalitásának, s így kapjuk, hogy $Q(C_Q - C_{Q_0}) = 0$. Ekkor $Q = QC_Q = QC_{Q_0}$. Ezért $Q \leq C_{Q_0}$, ahonnan $C_Q \leq C_{Q_0}$ következik. A $Q_0 \leq Q$ összefüggés miatt kapjuk, hogy $C_Q = C_{Q_0}$. Ezzel az állítás első része bizonyítást nyert.

Legyen most $P \in \mathcal{A}$ tetszőleges nemzérus projekció. A bizonyítás első része miatt a $P\mathcal{A}P$ tetszőleges nemzérus projekciója tartalmaz nemzérus Abel-projekciót. Ezért $P\mathcal{A}P$ egy I. típusú Neumann-algebra.

3.7.9. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ Neumann-algebra és P, Q projekciók. Ha $P \precsim Q$, akkor $C_P \leq C_Q$.*

Bizonyítás. Legyen $U \in \mathcal{A}$ parciális izometria, melyre $P = U^*U$ és $UU^* \leq Q$. Legyen $x \in H$ tetszőleges és $y = Ux$. Ekkor $y \in \operatorname{rng} Q$ miatt

$$APx = AU^*Ux = AU^*y = (AU^*)Qy.$$

Innen kapjuk, hogy $\mathcal{A} \operatorname{rng} P \subset \mathcal{A} \operatorname{rng} Q$. Ezért

$$\overline{[\mathcal{A}'\mathcal{A} \operatorname{rng} P]} \subset \overline{[\mathcal{A}'\mathcal{A} \operatorname{rng} Q]},$$

ahonnan a 3.5.12. Állítás miatt $C_P \leq C_Q$ adódik.

3.7.10. Lemma. *Legyen P egy tetszőleges, Z pedig egy centrális projekció az $\mathcal{A}$ Neumann-algebrában. Ekkor $C_{PZ} = C_P Z$.*

Bizonyítás. Világos, hogy $0 = PZ(I - C_{PZ})$. Mivel $Z(I - C_{PZ})$ centrális projekció, a 3.6.15. Lemma miatt kapjuk, hogy $0 = C_P Z(I - C_{PZ})$, ahonnan

$$C_P Z = C_P Z C_{PZ} = C_{PZ}$$

következik, hiszen $C_P, Z \geq C_{PZ}$.

3.7.11. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ Neumann-algebra és $P, Q \in \mathcal{A}$ Abel-projekciók. Ekkor $P \sim Q$ akkor és csak akkor ha $C_P = C_Q$.*

Bizonyítás. Ha $P \sim Q$, akkor a 3.7.9. Lemma miatt adódik, hogy $C_P = C_Q$.

A fordított állításhoz a Schröder-Bernstein-féle tétel (3.5.8. Tétel) miatt elegendő belátni, hogy ha $C_P \leq C_Q$, akkor $P \precsim Q$. Ahhoz, hogy ezt megmutassuk, az összehasonlítási tétel (3.5.18. Tétel) és a 3.7.10. Lemma miatt feltételezhetjük, hogy $P \succsim Q$. Mivel ekvivalens projekciók centrális fedője megegyezik, még azt is feltehetjük, hogy $P \geq Q$. Ekkor a 3.7.2. Következmény miatt $Q = C_Q P$, mivel Q centrális a $P\mathcal{A}P$ kommutatív algebrában. Innen $Q = C_Q P \geq C_P P = P$ adódik, s ezért $P = Q$. A bizonyítás ezzel teljes.

3.7.12. Definíció. Az $\mathcal{A}$ Neumann-algebrát homogénnek nevezzük, ha létezik benne egymással ekvivalens Abel-projekcióknak egy olyan (P_α) páronként ortogonális rendszere, melyre $\vee_\alpha P_\alpha = \sum_\alpha P_\alpha = I$.

3.7.13. Megjegyzés. Könnyű látni, hogy minden kommutatív Neumann-algebra és a $B(H)$ is homogén.

3.7.14. Állítás. *Homogén Neumann-algebra szükségképpen I. típusú.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ homogén Neumann-algebra. Tekintsünk egy $P \in \mathcal{A}$ nemzérus centrális projekciót. Legyen (P_α) egymással ekvivalens, páronként ortogonális Abel-projekciók egy olyan rendszere, melyre $\sum_\alpha P_\alpha = I$. Ekkor $P_\alpha \wedge P = P_\alpha P \neq 0$ valmely α esetén. Mivel $0 \neq P_\alpha P \leq P$ és $P_\alpha P \leq P_\alpha$, így $P_\alpha P$ a P-nek egy nemzérus Abel-szubprojekciója.

3.7.15. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy I. típusú Neumann-algebra. Ekkor létezik páronként ortogonális centrális projekcióknak egy olyan (P_α) rendszere, melyre $\sum_\alpha P = I$ és minden $\mathcal{A}P_\alpha$ algebra homogén.*

Bizonyítás. Legyen (P_α) egymásra ortogonális nemzérus centrális projekcióknak egy maximális rendszere, melynél minden $\mathcal{A}P_\alpha$ algebra homogén. Megmutatjuk, hogy $\sum_\alpha P_\alpha = I$. Tegyük fel, hogy ez nem igaz és tekintsük az $\mathcal{A}(I - \sum_\alpha P_\alpha)$ algebrát. Ekkor a maximalitás miatt ebben nem létezik olyan P nemzérus centrális projekció, amire a $\mathcal{A}P = \mathcal{A}(I - \sum_\alpha P_\alpha)P$ algebra homogén lenne. A 3.7.8. Lemma miatt $\mathcal{A}(I - \sum_\alpha P_\alpha)$ egy I. típusú Neumann-algebra. A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy minden $\mathcal{A}$ I. típusú algebrának van olyan P nemzérus centrális projekciója, melyre az $\mathcal{A}P$ algebra homogén, s ezzel ellentmondáshoz jutunk. Legyen tehát $\mathcal{A}$ I. típusú Neumann-algebra és legyen (Q_α) egymásra ortogonális hűséges Abel-projekciók egy maximális rendszere

$\mathcal{A}$-ban (ennek létezését a 3.6.17. Tétel garantálja). Legyen $Q = \sum_\alpha Q_\alpha$. Ekkor $I - Q$ nem lehet hűséges, hiszen akkor tartalmazna egy hűséges Abel projekciót (3.7.8. Lemma), ami ellentmondana a (Q_α) rendszer maximalitásának. Legyen $R = I - C_{I-Q}(\neq 0)$. Ekkor $(I-Q)R = 0$, ahonnan $R = RQ$. Az R centrális projekció, így az RQ_α-k projekciók és $R = \sum_\alpha RQ_\alpha$. Mivel C_{Q_α}-k megegyeznek, így a Q_α-k egymással ekvivalensek (3.7.11. Állítás). Az R centralitása miatt innen kapjuk az RQ_α-k ekvivalenciáját. Találtunk tehát egy olyan R nemzérus centrális projekciót $\mathcal{A}$-ban, ami előáll egymással ekvivalens nemzérus Abel-projekciók összegeként. Ez azt jelenti, hogy az $\mathcal{A}R$ algebra homogén.

Ezzel a bizonyítás teljes.

Tételünkből azonnal adódik az alábbi

3.7.16. Következmény. *Minden I. típusú faktor homogén.*

A 3.7.18. Tétel bizonyításában fel fogjuk használni a következő lemmát, melynek bizonyítását (ami megtalálható pl. [12, 5.5.6. Proposition] allatt) mellőzzük.

3.7.17. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ egy Neumann-algebra és $P \in \mathcal{A}'$ projekció. Ekkor az $\mathcal{A}P$ Neumann-algebrának, mint a P értékkészletén ható algebrának a kommutánsa éppen $P\mathcal{A}'P$.*

3.7.18. Tétel. *Ha $\mathcal{A}$ I. típusú faktor, akkor $\mathcal{A}$ izomorf egy Hilbert-tér teljes operátoralgebrájával.*

Bizonyítás. A 3.6.19. Megjegyzés miatt $\mathcal{A}'$ is I. típusú faktor. Legyen $P \in \mathcal{A}'$ hűséges Abel-projekció $\mathcal{A}'$-ban (3.6.17. Tétel). Tekintsük az

$$A \longmapsto AP$$

leképezését $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{A}P$-re. Könnyen látszik, hogy ez egy szürjektív *-homomorfizmus. Megmutatjuk, hogy leképezésünk injektív is. Ehhez legyen $A \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $PA = AP = 0$. Az operátorok szokásos valós és képzetes részre való bontásának módszerét alkalmazva feltehető, hogy A önadjungált. A fenti, $PA = AP = 0$ összefüggés miatt kapjuk, hogy a $\sigma(A)$ minden, a 0-tól pozitív távolságra lévő Borel-halmazának az A-hoz tartozó Q spektrálmértékére fennáll, hogy $PQ = QP = 0$. A 3.5.12. Állítás miatt a P $\mathcal{A}'$-beli centrális fedőjének értékkészlete:

$$\overline{[\mathcal{A}'\mathcal{A}'' \operatorname{rng} P]} = \overline{[\mathcal{A}'\mathcal{A} \operatorname{rng} P]} = H.$$

Mivel tetszőleges $T \in A, T' \in \mathcal{A}', x \in H$ esetén

$$Q(T'TPx) = T'QPTx = 0,$$

ezért $Q = 0$. Innen kapjuk, hogy $A = 0$, amivel transzformációnk injektivitása bizonyítást nyert.

Tekintsük most az $\mathcal{A}P$ Neumann-algebrát az P értékkészletén mint Hilbert-téren. A 3.7.17. Lemma miatt ennek kommutánsa $P\mathcal{A}'P$. Mivel $\mathcal{A}$ faktor, így $\mathcal{A}'$ is az. A 3.7.4. Következmény miatt kapjuk, hogy $P\mathcal{A}'P$ is faktor. Ugyanakkor P Abel-projekció $\mathcal{A}'$-ban, tehát $P\mathcal{A}'P$ egy kommutatív faktor, ahonnan $P\mathcal{A}'P = \mathbb{C}P$ adódik. Innen a második kommutáns tétel miatt kapjuk, hogy $\mathcal{A}P$ megegyezik a P értékkészletén értelmezett összes operátor algebrájával. A bizonyítás első része miatt ezen algebra *-izomorf $\mathcal{A}$-val. Ezzel a bizonyítás teljes.

3.7.19 . Megjegyzés. Az I. típusú Neumann-algebrák szerkezete teljesen leírható. A 3.7.15. Tétel miatt elegendő csak a homogén I. típusú algebrákkal foglalkozni. Nevezetes eredmény, hogy minden ilyen algebra egy kommutatív Neumann-algebrának és egy I. típusú faktornak, azaz egy Hilbert-tér teljes operátoralgebrájának a tenzorszorzatával izomorf (lásd pl. [20] 2.3. szakaszát). A tenzorszorzat fogalmának pontos definícióját nem adjuk meg, de megjegyezzük, hogy az $\mathcal{A} \otimes B(H)$ szorzatot (ahol $\mathcal{A}$ egy kommutatív Neumann-algebra, H pedig egy Hilbert-tér) durván úgy kell elképzelni, mint az $\mathcal{A}$ elemeiből álló $\dim H \times \dim H$-s matrixok algebráját.

3.8 Faktorok

Számos Neumann-algebrákra vonatkozó kérdés redukálható a faktorok esetére. Ennek oka, hogy Neumann egy klasszikus eredménye szerint szeparábilis Hilbert-téren adott tetszőleges Neumann-algebra előáll faktorok úgynevezett direktintegráljaként. Ezért fontos a faktorok leírása, mely problémával kapcsolatos legalapvetőbb eredményeket az alábbiakban foglaljuk össze.

Először is, amint azt a következő tétel mutatja, faktorok projekcióihoz számértéket tudunk rendelni alkalmas módon, nevezetesen úgy, hogy az így adódó számértékű függvény a végesdimenziós esetben megszokott ranghoz hasonló tulajdonságokkal rendelkezzen.

3.8.1 . Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy faktor valamely szeparábilis Hilbert-téren és jelölje $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ az $\mathcal{A}$ projekcióinak halmazát. Ekkor pozitív skalárszorzótól eltekintve egyértelműen létezik egy olyan $D : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$ függvény, melyre*

(1) $D(P) > 0$ akkor és csak akkor ha $P \neq 0$;

(2) $D(P) \leq D(Q)$ akkor és csak akkor ha $P \precsim Q$;

(3) $D(P+Q) = D(P) + D(Q)$ *ha* $PQ = 0$*;*

teljesül tetszőleges $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ *esetén. A* D *értékkészletére fennáll, hogy*

$$D(\mathcal{P}(\mathcal{A})) = \begin{cases} \{0, c1, \ldots, cn\} & \textit{valamely } c > 0 \textit{ és } n \in \mathbb{N} \textit{ esetén, ha } \mathcal{A}\ I_{fin} \textit{ típusú;} \\ \{0, c1, c2, \ldots\} & \textit{valamely } c > 0 \textit{ esetén, ha } \mathcal{A}\ I_\infty \textit{ típusú;} \\ [0, c] & \textit{valamely } c > 0 \textit{ esetén ha } \mathcal{A}\ II_1 \textit{ típusú;} \\ [0, \infty] & \textit{ha } \mathcal{A}\ II_\infty \textit{ típusú;} \\ \{0, \infty\} & \textit{ha } \mathcal{A}\ III. \textit{ típusú;} \end{cases}$$

3.8.2. Definíció. A fenti tételben szereplő D függvényt dimenziófüggvénynek nevezzük.

A dimenziófüggvénynél talán még fontosabb szerepet játszanak az ún. nyomok, melyeket lényegében a dimenziófüggvénynek az $\mathcal{A}^+$ elemeire való lineáris kiterjesztésével kaphatunk.

3.8.3. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy Neumann-algebra. A $\tau : \mathcal{A}^+ \to [0, \infty]$ függvényt nyomnak (trace-nek) nevezzük $\mathcal{A}$-n, ha additív, pozitív homogén és unitérinvariáns (azaz $\tau(UAU^*) = \tau(A)$ teljesül minden $A \in \mathcal{A}^+$ és $U \in \mathcal{A}$ unitér operátor esetén).

A τ nyomot végesnek nevezzük, ha értékei végesek. Megmutatható, hogy ebben az esetben τ kiterjeszthető az egész $\mathcal{A}$-ra pozitív lineáris funkcionálként, melyre teljesül az ún. nyom-tulajdonság, azaz $\tau(AB) = \tau(BA)$ minden $A, B \in \mathcal{A}$ esetén.

A τ nyomot szemivégesnek nevezzük, ha az $\mathcal{A}^+$ véges nyomú elemeinek halmaza gyengén sűrű $\mathcal{A}^+$-ban.

A τ nyomot hűségesnek nevezzük, ha $\tau(A) = 0$, $A \in \mathcal{A}^+$ esetén $A = 0$.

A legfontosabb nyomok az ún. normálisak, azaz melyekre $\tau(\sup_\alpha A_\alpha) = \sup_\alpha \tau(A_\alpha)$ teljesül minden olyan $\{A_\alpha\} \subset \mathcal{A}^+$ rendszer esetén, aminek létezik a szuprémuma az $\mathcal{A}^+$-ban.

A nyom létezésével kapcsolatban a következő alapvető tétel igaz.

3.8.4. Tétel. *Legyen* $\mathcal{A}$ *egy faktor valamely Hilbert-téren. Ekkor a következő állítások igazak:*

(i) Ha $\mathcal{A}$ *véges, akkor* $\mathcal{A}^+$*-n pozitív skalárszorzótól eltekintve egyértelműen létezik hűséges véges nyom, ami automatikusan normális.*

(ii) Ha $\mathcal{A}$ *egy* II_∞ *típusú faktor, akkor* $\mathcal{A}^+$*-n pozitív skalárszorzótól eltekintve egyértelműen létezik hűséges szemivéges nyom, ami automatikusan normális.*

(iii) Ha $\mathcal{A}$ egy I_∞ típusú faktor, akkor $\mathcal{A}^+$-n pozitív skalárszorzótól eltekintve egyértelműen létezik hűséges normális szemivéges nyom.

(iv) Ha $\mathcal{A}$ egy III. típusú faktor, akkor $\mathcal{A}^+$-n nem létezik zérustól különböző normális szemivéges nyom.

3.8.5 . Megjegyzés. A 3.8.4. Tétellel kapcsolatban hangsúlyozzuk azt az érdekes tényt, hogy az I_∞ típusú faktorokon az I_{fin}, II_1 és II_∞ típusú faktorok esetével ellentétben a fellépő hűséges szemivéges nyomok nem szükségképpen normálisak. Ezen szinguláris nyomokat Dixmier-féle nyomoknak szokás nevezni.

A 3.7.18. Tétel teljesen leírta az I. típusú faktorokat. Az alábbiakbann példát adunk II. típusú faktorokra.

A továbbiakban legyen G egy diszkrét csoport. Jelölje

$$l_2(G) = \{x : G \to \mathbb{C} \,:\, \sum_g |x(g)|^2 < \infty\}.$$

Ekkor $l_2(G)$ Hilbert-tér a pontonkénti összeadás és skalárral szorzás műveletével és a

$$\langle x, y\rangle = \sum_g x(g)\overline{y(g)} \qquad (x, y \in l_2(G))$$

módon értelmezett belsőszorzattal. Az ezen belsőszorzatból származó normát jelölje $\|.\|_2$. Legyen $x, y \in l_2(G)$. Az x és y konvolúcióján a

$$(x * y)(h) = \sum_g x(hg^{-1})y(g) \qquad (h \in G)$$

módon definiált függvényt értjük. Általában nem igaz, hogy $x*y \in l_2(G)$-nek, az azonban mindig fenáll, hogy

$$x * y \in l_\infty(G) = \{x : G \to \mathbb{C} \,:\, \sup_g |x(g)| < \infty\}.$$

Valóban, könnyen belátható, hogy

$$\|x * y\|_\infty = \sup_h |(x * y)(h)| \le \|x\|_2\|y\|_2.$$

Tetszőleges $x \in l_2(G)$ esetén definiáljuk

$$L_x y = x * y, \quad R_x y = y * x \qquad (y \in l_2(G)).$$

Világos, hogy $L_x, R_x : l_2(G) \to l_\infty(G)$ lineáris operátorok. Jelölje

$$\mathcal{L}_G = \{L_x \,:\, x \in l_2(G) \text{ és } L_x : l_2(G) \to l_2(G) \text{ korlátos lineáris operátor}\}$$

és

$$\mathcal{R}_G = \{R_x \,:\, x \in l_2(G) \text{ és } R_x : l_2(G) \to l_2(G) \text{ korlátos lineáris operátor}\}.$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy $\mathcal{L}_G$ és $\mathcal{R}_G$ véges Neumann-algebrák az $l_2(G)$ Hilbert-téren. A bizonyításban szükségünk a következő egyszerű észrevételekre. Tetszőleges $g \in G$ esetén jelölje

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{ha } h = g \\ 0 & \text{ha } h \neq g. \end{cases}$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$(x * \delta_g)(h) = x(hg^{-1}) \quad \text{és} \quad (\delta_g * x)(h) = x(g^{-1}h)$$

teljesül minden $g, h \in G$ és $x \in l_2(G)$ esetén. Innen adódik, hogy $x * \delta_g, \delta_g * x \in l_2(G)$. Világos, hogy ha e jelöli a G egységelemét, akkor $x * \delta_e = \delta_e * x = x$ $(x \in l_2(G))$.

3.8.6 . Lemma. *Ha $T \in B(l_2(G))$ és*

$$\langle T\delta_g, \delta_h \rangle = \langle x * \delta_g, \delta_h \rangle \qquad (g, h \in G),$$

akkor $T = L_x$.

B i z o n y í t á s. Először is vegyük észre, hogy $\{\delta_g \,:\, g \in G\}$ egy teljes ortonormált rendszer $l_2(G)$-ben. Az ortonormalitás triviális. Ha most $x \in l_2(G)$ olyan, hogy $\langle x, \delta_g \rangle = 0$ minden $g \in G$-re, akkor $x(g) = 0$ $(g \in G)$, tehát $x = 0$. Ez mutatja rendszerünk teljességét.

A lemmában szereplő feltételéből kapjuk, hogy $T\delta_g = x * \delta_g$ $(g \in G)$. Legyen $y \in l_2(G)$ tetszőleges. Ekkor y Fourier-sora $\sum_g y(g)\delta_g$, ami y-hoz konvergál az $l_2(G)$ Hilbert-térben. Ezért T folytonossága miatt

$$Ty = T(\sum_g y(g)\delta_g) = \sum_g y(g)T\delta_g = \sum_g y(g)x * \delta_g.$$

Másrészt, ha $F \subset G$ tetszőleges véges halmaz, akkor

$$\|x * \sum_{g \in F} y(g)\delta_g - x * y\|_\infty = \|x * (\sum_{g \in F} y(g)\delta_g - y)\|_\infty \leq \|x\|_2 \|\sum_{y \in F} y(g)\delta_g - y\|_2 \longrightarrow 0$$

amint F végigfut a G összes véges részhalmazán. Így $\sum_g y(g)x * \delta_g = x * y$ teljesül az $l_\infty(G)$-ben. A fentiekkel összevetve, kapjuk, hogy $Ty = x * y$. Mivel $y \in l_2(G)$ tetszőleges volt, ezért $T = L_x$.

3.8.7. Tétel. *$\mathcal{L}_G$ és $\mathcal{R}_G$ véges Neumann-algebrák az $l_2(G)$ Hilbert-téren.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy $\mathcal{L}_G$ és $\mathcal{R}_G$ algebra. Tekintsük a $\mathcal{L}_G$ esetét. Világos, hogy ha $L_x, L_y \in \mathcal{L}_G$, akkor $L_{x+y} = L_x + L_y \in \mathcal{L}_G$ és tetszőleges $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén $\lambda L_x = L_{\lambda x} \in \mathcal{L}_G$. Nézzük most a szorzatra való zártságot. Először is vegyük észre, hogy

$$x * y = x * (y * \delta_e) = L_x L_y \delta_e \in l_2(G).$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\langle L_x L_y \delta_g, \delta_h \rangle = \langle x * (y * \delta_g), \delta_h \rangle = (x * (y * \delta_g))(h) =$$

$$\sum_f x(hf^{-1})(y * \delta_g)(f) = \sum_f x(hf^{-1})y(fg^{-1}) = \sum_f x(hg^{-1}f^{-1})y(f) =$$

$$(x * y)(hg^{-1}) = ((x * y) * \delta_g)(h) = \langle (x * y) * \delta_g, \delta_h \rangle.$$

Az előző lemma felhasználásával kapjuk, hogy $L_{x*y} = L_x L_y \in \mathcal{L}_G$. Tetszőleges $x \in G$ esetén legyen $x^*(g) = \overline{x(g^{-1})}$ $(g \in G)$. A fentiekhez hasonló okoskodás és triviális számolás mutatja, hogy $L_x^* = L_{x^*} \in \mathcal{L}_G$. Mivel $I = L_{\delta_e} \in \mathcal{L}_G$, ezért ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{L}_G$ egy, az identitást tartalmazó *-részalgebrája $B(l_2(G))$-nek. Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy ugyanez igaz az $\mathcal{R}_G$-re is.

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{L}_G$ és $\mathcal{R}_G$ egymás kommutánsai, amiből következik, hogy ők Neumann-algebrák. Legyen $L_x \in \mathcal{L}_G$ és $R_y \in \mathcal{R}_G$. Ekkor

$$\langle L_x R_y \delta_g, \delta_h \rangle = (x * (\delta_g * y))(h) = \sum_f x(hf^{-1})(\delta_g * y)(f) = \sum_f x(hf^{-1})y(g^{-1}f),$$

másrészt

$$\langle R_y L_x \delta_g, \delta_h \rangle = ((x * \delta_g) * y)(h) = \sum_f (x * \delta_g)(hf^{-1})y(f) = \sum_f x(hf^{-1}g^{-1})y(f).$$

Ha itt f-et $g^{-1}f$-fel helyettesítjük, akkor kapjuk, hogy a fenti két egyenlet jobboldala, s így baloldala is megegyezik. Mivel $\{\delta_g\}$ teljes ortonormált rendszer $l_2(G)$-ben, adódik, hogy L_x és R_y egymással felcserélhetők. Ezért $\mathcal{L}_G \subset \mathcal{R}'_G$ és $\mathcal{R}_G \subset \mathcal{L}'_G$. Legyen most $T \in \mathcal{R}'_G$. Tekintsük az $L_{T\delta_e}$ operátort. Ekkor

$$\langle T\delta_g, \delta_h \rangle = \langle T R_{\delta_g} \delta_e, \delta_h \rangle = \langle R_{\delta_g} T\delta_e, \delta_h \rangle = \langle (T\delta_e) * \delta_g, \delta_h \rangle$$

ahonnan a 3.8.6. Lemma miatt kapjuk, hogy $T = L_{\delta_e} \in \mathcal{L}_G$. Mivel $T \in \mathcal{R}'_G$ tetszőleges volt, adódik, hogy $\mathcal{R}'_G \subset \mathcal{L}_G$. Így kapjuk, hogy $\mathcal{L}_G = \mathcal{R}'_G$ és hasonlóan látható be az $\mathcal{R}_G = \mathcal{L}'_G$ összefüggés is. Tehát az $\mathcal{L}_G$, $\mathcal{R}_G$ algebrák Neumann-algebrák.

Hátravan még annak bizonyítása, hogy mindkét algebránk véges. Legyen $U \in \mathcal{L}_G$ olyan parciális izometria, melyre $U^*U = I$. Azt kell belátni, hogy ekkor $UU^* = I$ is fennáll. Legyen $x \in l_2(G)$ olyan elem, melyre $L_x = U$. Ekkor a már bizonyítottak szerint $I = U^*U = L_x^* L_x = L_{x^*} L_x = L_{x^* * x}$. Megmutatjuk, hogy $L_{x * x^*} = L_x L_x^* = UU^* = I$ is teljesül. Egyrészt

$$1 = \langle L_{x^* * x}\delta_h, \delta_h\rangle = ((x^* * x) * \delta_h)(h) = (x^* * x)(e) = \sum_g x^*(g^{-1})x(g) = \sum_g \overline{x(g)}x(g).$$

Másrészt

$$\langle L_{x * x^*}\delta_h, \delta_h\rangle = ((x * x^*) * \delta_h)(h) = (x * x^*)(e) = \sum_g x(g^{-1})x^*(g) = \sum_g x(g^{-1})\overline{x(g^{-1})}.$$

Ezekből kapjuk, hogy

$$\langle UU^*\delta_h, \delta_h\rangle = \langle L_{x * x^*}\delta_h, \delta_h\rangle = 1$$

minden $h \in G$ esetén. Mivel UU^* projekció és δ_h egységvektor, ezért innen következik, hogy δ_h benne van az UU^* értékkészeletében. Azonban $\{\delta_h\}$ teljes ortonormált rendszer, így $UU^* = I$ adódik. A bizonyítás ezzel teljes.

3.8.8. Definíció. A G csoportot i.c.c. csoportnak nevezzük (i.c.c. = infinite conjugate class) ha tetszőleges $g \neq e$ esetén az $\{aga^{-1} : a \in G\}$ mellékosztály végtelen.

3.8.9. Tétel. *Ha $G \neq \{e\}$ egy i.c.c. csoport, akkor az $\mathcal{L}_G$ és $\mathcal{R}_G$ Neumann-algebrák II_1 típusú faktorok.*

B i z o n y í t á s. Lássuk be először, hogy $\mathcal{L}_G$ faktor. Legyen $L_x \in \mathcal{L}_G \cap \mathcal{L}_G'$. Ekkor $L_x L_y = L_y L_x$ $(y \in G)$. Innen kapjuk, hogy $L_{x*y} = L_{y*x}$, azaz $x * y = y * x$ minden $y \in G$ esetén. Speciálisan $x * \delta_g = \delta_g * x$ $(g \in G)$. Ezen egyenlet oldalain álló függvényeket h-nál tekintve kapjuk, hogy $x(hg^{-1}) = x(g^{-1}h)$ $(g, h \in G)$. Ebből $x(ghg^{-1}) = x(g^{-1}gh) = x(h)$ adódik. Mivel G egy i.c.c. csoport, ezért $h \neq e$ esetén ezen összefüggésből $x \in l_2(G)$ miatt az következik, hogy $x(h) = 0$. Innen kapjuk, hogy $x = \lambda\delta_e$, tehát L_x az identitás skalárszorosa. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{L}_G$ faktor.

Mivel a $\{L_{\delta_g} : g \in G\}$ egy végtelen számosságú lineárisan független részhalmaza $\mathcal{L}_G$-nek, ezért $\mathcal{L}_G$ végtelen dimenziós véges faktor. A 3.6.10. Tétel miatt véges faktor szükségképpen I_{fin} vagy II_1 típusú. A 3.7.18. Tétel miatt az I_{fin} típusú faktorok véges dimenziósak. Ezért az $\mathcal{L}_G$ faktor II_1 típusú.

3.8.10. Állítás. *Legyen G nemtriviális i.c.c. csoport. Tetszőleges $g \in G$ esetén a*

$$\tau : A \mapsto \langle A\delta_g, \delta_g\rangle$$

módon definiált funkcionál hűséges véges nyom az $\mathcal{L}_G$ illetve $\mathcal{R}_G$ II_1 típusú faktorokon.

B i z o n y í t á s. Csak a $\mathcal{L}_G$ esetével foglalkozunk. Világos, hogy τ pozitív lineáris funkcionál. Belátjuk, hogy τ rendelkezik a nyom-tulajdonsággal (lásd 3.8.3. Definíció). Ez következik az alábbi számolásból:

$$\langle L_x L_y \delta_g, \delta_g \rangle = \langle x * (y * \delta_g), \delta_g \rangle = (x * (y * \delta_g))(g) =$$

$$\sum_f x(gf^{-1})(y * \delta_g)(f) = \sum_f x(gf^{-1})y(fg^{-1}) = \sum_f x(f^{-1})y(f)$$

és

$$\langle L_y L_x \delta_g, \delta_g \rangle = \langle y * (x * \delta_g), \delta_g \rangle = (y * (x * \delta_g))(g) =$$

$$\sum_f y(gf^{-1})(x * \delta_g)(f) = \sum_f y(gf^{-1})x(fg^{-1}) = \sum_f y(f^{-1})x(f).$$

Mivel ezen egyenletek a jobboldalon álló utolsó tagjai megegyeznek, kapjuk a kívánt tulajdonságot.

Végezetül megmutatjuk, hogy τ hűséges. Ehhez legyen $T \in \mathcal{L}_G$ pozitív operátor. Ekkor létezik olyan $S \in \mathcal{L}_G$ operátor, melyre $T = S^*S$. Innen következik, hogy van olyan $x \in l_2(G)$ függvény, melyre $T = L_{x^*x}$. Ha $\langle L_{x^*x}\delta_g\delta_g \rangle = 0$, akkor a fenti számolásból kapjuk, hogy

$$0 = \sum_f x^*(f^{-1})x(f) = \sum_f \overline{x(f)}x(f).$$

Ebből adódik, hogy $x = 0$, s ezért $T = 0$. A bizonyítás ezzel teljes.

3.8.11 . Megjegyzés. Belátható, hogy a

$$P \mapsto \langle P\delta_g, \delta_g \rangle$$

leképezés $\mathcal{L}_G$ illetve $\mathcal{R}_G$ projekcióin éppen a normalizált dimenziófüggvény.

3.8.12 . Megjegyzés. Lássunk most példát i.c.c. csoportra. Könnyű megmutatni, hogy az $\mathbb{N}$ azon permutációinak S_∞ csoportja, melyek véges sok elemtől eltekintve mindent fixen hagynak, egy i.c.c. csoport. Ugyancsak ilyen csoport az n generátoros szabadcsoport ($n \geq 2$) melyet $\mathbb{F}_n$-nel jelölünk.

Neumann megmutatta, hogy az $\mathcal{L}_{S_\infty}$ és $\mathcal{L}_{\mathbb{F}_n}$ II_1 típusú faktorok egymással nem izomorfak. Kadisontól származik az a híres, máig megoldatlan probléma, hogy vajon $n \neq m$ esetén $\mathcal{L}_{\mathbb{F}_n}$ és $\mathcal{L}_{\mathbb{F}_m}$ nem izomorf-e. A problémakör talán legnevezetesebb eredménye az, mely szerint az $\mathcal{L}_{\mathbb{F}_n}$ algebrák vagy mind izomorfak egymással vagy pedig páronként nem izomorfak.

3.8.13 . Megjegyzés. Ami a II_∞ faktorok létezését illeti, egy fontos eredmény szerint az $\mathcal{A}$ faktor pontosan akkor II_∞ típusú, ha izomorf valamely $\mathcal{A}_1 \otimes B(H)$ tenzorszorzattal, ahol $\mathcal{A}_1$ egy II_1 típusú faktor, H pedig végtelen dimenziós Hilbert-tér.

A III. típusú faktorokra adható példákkal kapcsolatban megemlítjük, hogy ezekhez az előzőeknél lényegesen haladottabb eszközökre lenne szükség, ezért ezekkel itt nem foglalkozunk.

3.8.14 . Megjegyzés. A fenti példák után természetes módon vetődik fel a faktorokra vonatkozó úgynevezett izomorfizmus-probléma megoldása, azaz annak igénye, hogy izomorfia erejéig határozzuk meg az összes lehetséges faktort.

Ami az I. típusú faktorok esetét illeti, már láttuk, hogy ezek mind izomorfak valamely Hilbert-tér teljes operátoralgebrájával.

A II. típusú faktorokra vonatkozóan az izomorfizmus-probléma mindmáig megoldatlan. Hogy két, a problémakörhöz kapcsolódó nevezetes eredményt említsünk, először utalunk Neumann és Murray egyik tételére, mely szerint bármely két hipervéges II_1 faktor izomorf (az AF-algebrák Neumann-algebrás analogonjaként egy Neumann-algebrát hipervégesnek nevezünk, ha őt generálja véges dimenziós *-részalgebráinak egy monoton növekvő sorozata). Hasonló állítás igaz II_∞ típusú hipervéges faktorokra is. Megemlítjük még azon nevezetes eredményt, mely szerint megszámlálhatatlanul végtelen sok egymással nem izomorf II_1 típusú faktor létezik.

Végezetül, ami a III. típusú faktorokat illeti, a rájuk vonatkozó izomorfizmus problémát A. Connes-nak sikerült megoldania 1973-ban. Alapvető tétele szerint a III. típusú faktoroknak kontinuum sok izomorfia osztálya van. Ennek megfelelően szokás beszélni III_λ $(0 \leq \lambda \leq 1)$ típusú faktorokról.

Felhasznált irodalom

[1] W. Arveson, *An Invitation to C^*-Algebra*, Springer-Verlag, 1976.

[2] B. Aupetit, *A Primer on Spectral Theory*, Springer-Verlag, 1991.

[3] L. Bing-Ren, *Introduction to Operator Algebras*, World Scientific, 1992.

[4] F.F. Bonsall and J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, 1973.

[5] J.W. Calkin, *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space*, Ann. Math. **42** (1941), 839–873.

[6] P.R. Chernoff, *Representations, automorphisms, and derivations of some operator algebras*, J. Funct. Anal. **12** (1973), 275–289.

[7] K.R. Davidson, *C^*-Algebras by Example*, American Mathematical Society, 1996.

[8] P.A. Fillmore, *A User's Guide to Operator Algebras*, John Wiley & Sons, Inc., 1996.

[9] I.N. Herstein, *Jordan homomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **81** (1956), 331–341.

[10] R.V. Kadison, *Theory of operators, Part II., Operator algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 61–85.

[11] R.V. Kadison, *Isometries of operator algebras*, Ann. Math. **54** (1951), 325–338.

[12] R.V. Kadison and J.R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. I.*, Academic Press, 1983.

[13] R.V. Kadison and J.R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. II.*, Academic Press, 1986.

[14] S. Kowalski and Z. Slodkowski, *A characterization of multiplicative linear functionals in Banach algebras,* Studia Math. **67** (1980), 215–223.

[15] G.J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.

[16] T.W. Palmer, *Banach Algebras and The General Theory of *-Algebras, Vol. I.*, Cambridge University Press, 1994.

[17] G.K. Pedersen, *Analysis Now*, Springer-Verlag, 1989.

[18] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Tata McGraw-Hill, 1983.

[19] B. Russo and H.A. Dye, *A note on unitary operators in C^*-algebras*, Duke Math. J. **33** (1966) 413–416.

[20] S. Sakai, *C^*-Algebras and W^*-Algebras*, Springer-Verlag, 1971.

[21] D.M. Topping, *Lectures on von Neumann Algebras*, Van Nostrand Reinhold Company, 1971

[22] A. Valette, *Extensions of C^*-algebras: A survey of the Brown-Douglas-Fillmore theory*, Nieuw Arch. Wisk. **30** (1982), 41–69.

[23] I. Vidav, *Uvod v Teorijo C^*-Algeber*, Institute of Mathematics, Physics and Mechanics, Ljubljana, 1982.